

# **Elektrische Antriebstechnik**

**Prof. Dr.-Ing. Joachim Böcker**

Skript zur Vorlesung

Stand vom 11.08.2009

Universität Paderborn

Fachgebiet Leistungselektronik und  
Elektrische Antriebstechnik

---

## Inhalt

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Antriebstechnische Begriffe und Grundlagen</b>	<b>6</b>
2.1	Grundbegriffe	6
2.2	Trägheitsgesetz	8
2.3	Antriebstechnische Aufgabenstellungen	9
2.4	Drehmoment- und Drehzahlanpassung	10
2.4.1	Getriebe	10
2.4.2	Translatorisch-rotatorische Anpassung	10
2.4.3	Getriebebemessung für durchlaufende Antriebe (ein Arbeitspunkt)	11
2.4.4	Getriebebemessung für durchlaufende Antriebe (Arbeitsbereich)	14
2.4.5	Getriebebemessung für reine Beschleunigungsvorgänge	16
2.4.6	Getriebebemessung für Beschleunigungsvorgänge mit Lastdrehmoment	21
2.4.7	Getriebebemessung für durchlaufenden Betrieb und Beschleunigungsvorgänge	24
2.5	Lastkennlinien	25
2.5.1	Trockene Reibung	25
2.5.2	Viskose Reibung	26
2.5.3	Lüfter	27
2.5.4	Wickler, Haspel	28
2.5.5	Traktionsantrieb	30
2.6	Schwingungsfähiger Antriebsstrang	32
<b>3</b>	<b>Gleichstrommotor</b>	<b>36</b>
3.1	Wirkprinzip	36
3.2	Aufbau	38
3.3	Kommutator und Ankerwicklungsschemata	39
3.4	Kommutierung und Wendepolwicklung	40
3.5	Ankerrückwirkung, Kompensations- und Compoundwicklung	41
3.6	Mathematische Modellierung	42
3.7	Elektrische und mechanische Leistung, Wirkungsgrad	45
3.8	Schaltungsarten, Klemmenbezeichnungen und Schaltzeichen	45
3.9	Fremderregter und permanent erregter Motor	46
3.10	Nebenschlussmotor	50
3.11	Reihenschlussmotor	51
3.12	Geregelter Betrieb	54
3.13	Betrieb an Strom- und Spannungsgrenzen	59
<b>4</b>	<b>Gleichstromsteller</b>	<b>62</b>
4.1	Tiefsetzsteller	62
4.1.1	Funktionsprinzip	62

---

4.1.2	Tiefsetzsteller mit Kondensator zur Spannungsglättung	67
4.1.3	Schaltungstechnische Realisierung	69
4.1.4	Lücken beim Tiefsetzsteller	70
4.2	Hochsetzsteller	74
4.2.1	Funktionsprinzip	74
4.2.2	Hochsetzsteller mit Kondensator zur Spannungsglättung	75
4.2.3	Schaltungstechnische Realisierung	76
4.2.4	Lücken beim Hochsetzsteller	77
4.3	Weitere aus dem Tiefsetzsteller abgeleitete Schaltungen	79
4.3.1	Bidirektionaler Gleichstromsteller mit Umkehrung der Stromrichtung	79
4.3.2	Bidirektionaler Gleichstromsteller mit Umkehrung der Spannungsrichtung	80
4.3.3	Vier-Quadranten-Steller	81
<b>5</b>	<b>Fremdgeführte Umrichter</b>	<b>82</b>
5.1	Thyristor-Mittelpunkt- und Brückenschaltungen	82
5.2	Umkehrstromrichter	86
5.3	Wechselspannungssteller	88
<b>6</b>	<b>Wechselstromtransformatoren</b>	<b>92</b>
6.1	Modellierung von Transformatoren mit Streuung	92
6.2	Dynamische Gleichungen und elektrisches Ersatzschaltbild	95
6.3	Transformation der Sekundärgrößen	96
6.3.1	Transformation der sekundärseitigen Größen auf die Primärseite im Verhältnis der Windungszahlen	97
6.3.2	Transformation auf eine primärseitig konzentrierte Streuung	97
6.3.3	Transformation auf eine sekundärseitig konzentrierte Streuung	98
<b>7</b>	<b>Drehstromtransformatoren</b>	<b>100</b>
7.1	Darstellung mit Wechselstromtransformatoren	100
7.2	Fünf- und Drei-Schenkel-Drehstromtransformator	100
7.3	Stern-Dreieck-Schaltung	103
7.4	Ersatzschaltbilder des Drehstrom-Transformators	105
7.5	Bezeichnungen und Schaltzeichen	105
<b>8</b>	<b>Asynchronmotoren</b>	<b>106</b>
8.1	Aufbau	106
8.2	Modellierung und Ersatzschaltbild	107
8.3	Drehmoment	108
8.4	Stromortskurve	115
8.5	Wechselstrom-Asynchronmotor	117
8.5.1	Spaltpolmotor	117
8.5.2	Kondensatormotor	120
<b>9</b>	<b>Synchronmotor</b>	<b>122</b>

---

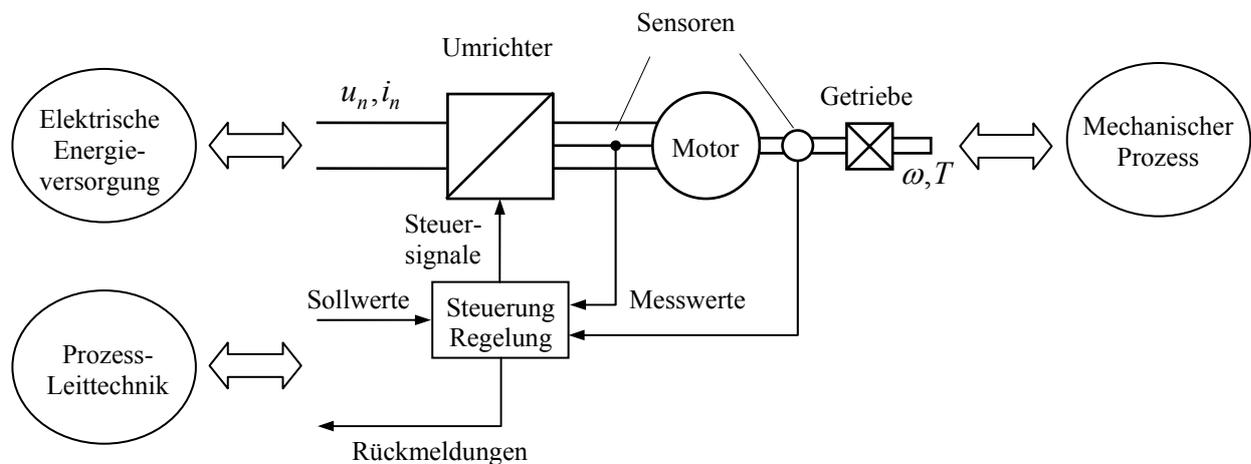
<b>10</b>	<b>Thermisches Verhalten</b>	<b>123</b>
10.1	Grundlagen der Wärmeleitung	123
<b>11</b>	<b>Anhang: Begriffe und Tabellen für elektrische Betriebsmittel</b>	<b>133</b>
11.1	Spannungsklassen	133
11.2	Schutzklassen	133
11.3	Schutzarten	134
11.4	Betriebsarten	134
11.5	Isolationsklassen für Motoren	135
11.6	Phasenfolge, Rechts- und Linkslauf	136
<b>12</b>	<b>Größengleichungen vs. Zahlenwertgleichungen</b>	<b>138</b>
<b>13</b>	<b>Literatur</b>	<b>139</b>

# 1 Einleitung

Elektrische Antriebe werden heute für vielfältige Funktionen eingesetzt:

- Förderantriebe (Rollgänge, Gurtförderer, Umlaufförderer, usw.)
- Hubantriebe (Krane, Aufzüge, Hubtische, Regalbediensysteme usw.)
- Fahrantriebe (Bahnen, Straßenfahrzeuge, Flurförderfahrzeuge usw.)
- Positionierantriebe (Bestückungs- und Montageautomaten, Werkzeugwechsler, Medizintechnik usw.)
- Roboter
- Gleichlaufantriebe (Transportieren, Bandbehandlungsanlagen für Blech, Papier, Folien, Textilien, Fäden, Drähte, Seile usw.)
- Wickelantriebe
- Taktantriebe (Querschneider, fliegende Scheren, usw.)
- Synchrone Bewegungsführung („Königswelle“ und „elektronische Kurvenscheiben“: Schneiden, Stanzen, Kleben, Schweißen, Verformen, Verpacken, Sortieren)
- Umformen (Extruder für Kunststoffe, Aluminium, Lebens- und Futtermittel, Spritzen, Ausblasen, Pressen, Tiefziehen, Rütteln, Schleudern)
- Werkzeugantriebe (für Metall, Holz, Stein, Glas, Papier, Kunststoffe usw.)
- Pumpen, Lüfter, Kompressoren
- Küchengeräte
- Kleinantriebe (CD-Laufwerke, Sitzverstellung usw.)

Man schätzt, dass etwa 60% der gesamten elektrischen Energie letztendlich in elektrischen Antrieben genutzt wird. Elektrische Antriebe werden gegenüber anderen Antriebsarten (hydraulisch, pneumatisch) aufgrund ihrer hervorragenden Steuerbarkeit bevorzugt. Diese Steuerbarkeit von Drehmoment, Drehzahl oder Position kommt durch die Speisung eines Motors als elektromechanischer Energiewandler durch eine steuerbare Leistungselektronik zustande.

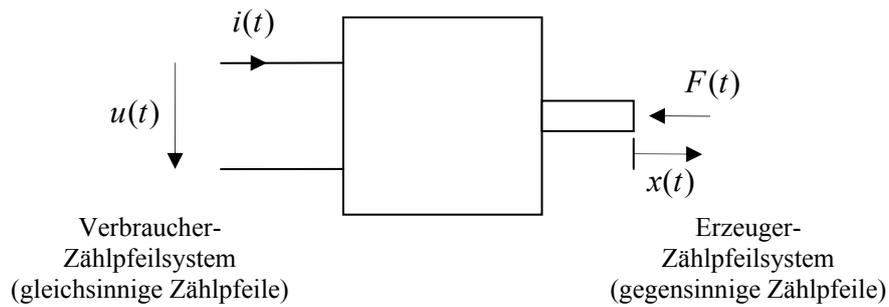


Typische Struktur eines elektrischen Antriebs mit seinen Schnittstellen zur elektrischen Energieversorgung, zum anzutreibenden mechanischen Prozess und zur übergeordneten Prozessleittechnik

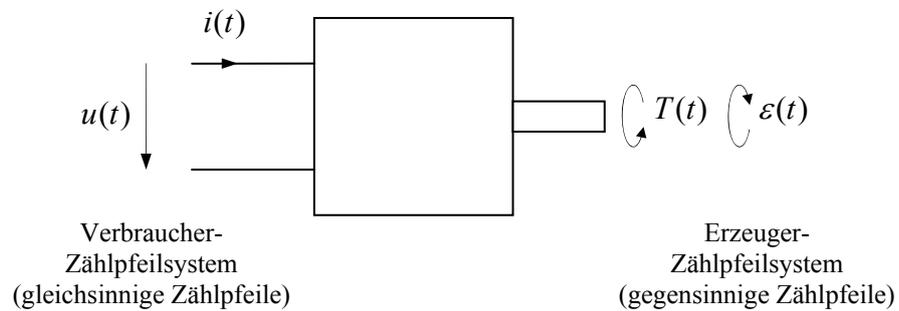
## 2 Antriebstechnische Begriffe und Grundlagen

### 2.1 Grundbegriffe

Der Motor als elektrisch-mechanischer Wandler:



Elektrisch und mechanisch freigeschnittener translatorischer Wandler mit einem Freiheitsgrad



Elektrisch und mechanisch freigeschnittener rotatorischer Wandler mit einem Freiheitsgrad

	translatorisch	rotatorisch
Kinematische Größen <sup>1</sup>		
• Verschiebung, Winkel	$x$	$\varepsilon$
• Geschwindigkeit	$v = \dot{x}$	$\omega = \dot{\varepsilon}$
• Beschleunigung	$a = \dot{v} = \ddot{x}$	$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varepsilon}$
• Ruck	$r = \dot{a} = \ddot{v} = \ddot{\ddot{x}}$	$\rho = \dot{\alpha} = \ddot{\omega} = \ddot{\varepsilon}$
Dynamische Größen <sup>2</sup>		
• Kraft, Drehmoment	$F$	$T$
mechanische Leistung	$P_{me} = vF$	$P_{me} = \omega T$
Arbeit	$W[t_0, t] = \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau$	$W[t_0, t] = \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau$
Masse, Massenträgheitsmoment	$m$	$J$
Impuls, Drehimpuls	$p = mv$	$D = \omega J$
kinetische Energie	$E = \frac{1}{2} mv^2$	$E = \frac{1}{2} J\omega^2$

Leistungsbilanz des Wandlers:

$$P_{el} = P_{me} + \dot{E}_i + P_i,$$

wobei  $P_{el} = ui$  die zugeführte elektrische Leistung,  $E_i$  die im Wandler gespeicherte innere Energie und  $P_i$  die im Wandler in andere Energieformen (Wärme) umgesetzte Leistung ist.  $P_i$  sind also die Verluste des Wandlers.

Der Wirkungsgrad wird üblicherweise nur für den stationären Betrieb definiert, also für  $\dot{E}_i = 0$ . Der Wirkungsgrad ist das Verhältnis von genutzter zu eingesetzter Leistung. Für den Fall des Antriebs betrachten wir die mechanische Leistung als Nutzleistung. Dann ist

$$\eta_{mot} = \frac{P_{me}}{P_{el}} = 1 - \frac{P_i}{P_{el}}$$

Wird der Wandler zum Zwecke der Erzeugung elektrischer Energie eingesetzt, also als Generator, wird der Wirkungsgrad entsprechend zu

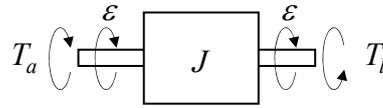
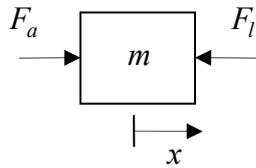
$$\eta_{gen} = \frac{P_{el}}{P_{me}} = 1 - \frac{P_i}{P_{me}}$$

definiert.

<sup>1</sup> die *Kinematik* ist die Lehre der Bewegung, ohne dass dabei die Ursachen der Bewegungen ergründet werden

<sup>2</sup> im ursprünglichen engen Wortsinn ist die *Dynamik* die Lehre von den Wirkungen der Kräfte, griechisch  $\deltaύναμις$  = Kraft

## 2.2 Trägheitsgesetz



Newtonsches Trägheitsgesetz:

$$\dot{p} = m\dot{v} = F_a - F_l$$

$$\dot{D} = J\dot{\omega} = T_a - T_l$$

Im stationären Fall gilt

$$F_a = F_l$$

bzw.

$$T_a = T_l$$

**Arbeit:**

$$W[t, t_0] = \int_{t_0}^t P d\tau = \int_{t_0}^t Fv d\tau = \int_{x_0}^x F dx$$

bzw.

$$W[t, t_0] = \int_{t_0}^t P d\tau = \int_{t_0}^t T\omega d\tau = \int_{\epsilon_0}^{\epsilon} T d\epsilon$$

**Begriffe Arbeit vs. Energie:**

*Arbeit* ist die aufsummierte Leistung „Leistung mal Zeit“ oder „Kraft mal Weg“. *Energie* ist dagegen das Vermögen, Arbeit zu leisten. Um Arbeit zu leisten, ist also in der Regel Energie notwendig. Ob die geleistete Arbeit umgekehrt wieder eine Energie ist, hängt vom System ab: Die an einem Reibungsprozess geleistete Arbeit ist verloren; es wäre begrifflich verfehlt, die Reibungsarbeit als Reibungsenergie zu bezeichnen. Wird aber Arbeit z. B. an einem Beschleunigungsvorgang geleistet, entsteht dadurch kinetische Energie. In diesem Fall ist Arbeit gleich Energie. Mathematisch gesehen, lässt sich die Frage, ob die an einem System geleistete Arbeit auch eine Energie ist, durch die Funktionsform entscheiden: Lässt sich die geleistete Arbeit als Funktion der momentanen Zustandsgrößen eines Systems schreiben, handelt es sich um eine Energie.

## 2.3 Antriebstechnische Aufgabenstellungen

### Positionierungsaufgaben oder Führung einer gewünschten Bewegung

Beispiele:

- Roboter für die Fertigungsautomatisierung (Schweißen, Lackieren, usw.)
- Positionieren und Führen von Werkzeugen und Werkstücken z.B. in Fräsmaschinen oder komplexen Bearbeitungszentren
- Positionierung eines Schreib-Lese-Kopfes einer Festplatte oder eines CD-Laufwerks
- ...

### Bereitstellung mechanischer Antriebsleistung

Beispiele:

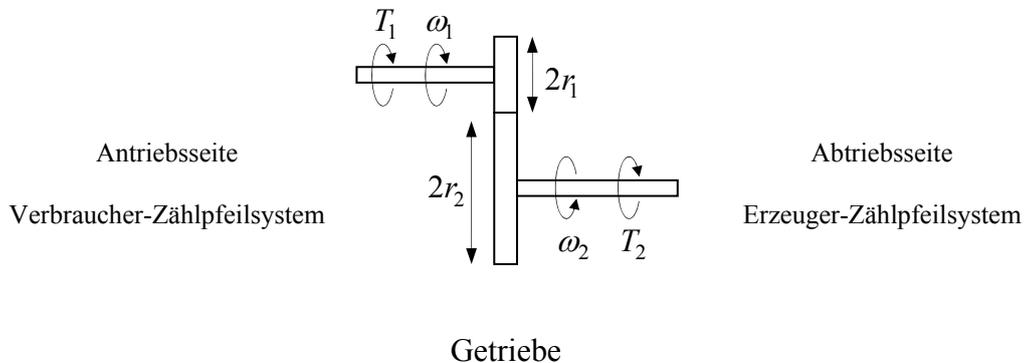
- Antriebe für Pumpen und Lüfter
- Traktionsantriebe für Schienen- und Straßenfahrzeuge
- Bohrmaschinen
- Haushaltsgeräte
- Zentrifugen
- Förderbänder
- 

Viele Antriebsaufgaben beinhalten Aspekte beider Kategorien. Es werden sowohl hohe Anforderungen an genaue Bewegung als auch große Leistungen benötigt:

- Portalkräne
- Aufzüge
- Papiermaschinen, Druckmaschinen: große Leistung bei sehr genauer Positionierung
- Walzwerke: sehr große Antriebsleistung bei sehr genauer Führung des Walzgutes
-

## 2.4 Drehmoment- und Drehzahlanpassung

### 2.4.1 Getriebe



In einigen Fällen gelingt es, Antriebe zu finden, die direkt in ihrem Drehmoment- und Drehzahlbereich zu den Erfordernissen der Last passen. In diesen Fällen sprechen wir von *Direktantrieben*. In vielen anderen Fällen werden zur Anpassung von Drehzahl und Drehmoment Getriebe notwendig. Getriebe können mit Zahn- oder Reibrädern ausgeführt werden. Zahnräder ermöglichen eine formschlüssige, Reibräder eine kraftschlüssige Verbindung. Letzteres ist mit Schlupf verbunden, welcher im Folgenden außer Acht bleibt.

Getriebeübersetzung:

$$i_G = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

$r_1, r_2$  effektive Radien  
 $z_1, z_2$  Zahnzahlen

Bei stationärer Betrachtung bzw. bei Vernachlässigung der Getriebeträgheit und Reibung folgt für die Drehmomente

$$i_G = \frac{T_2}{T_1}$$

bzw. für die Leistungen

$$P_2 = P_1$$

### 2.4.2 Translatorisch-rotatorische Anpassung

Die einfachste Art, eine rotatorische in eine translatorische Bewegung umzusetzen, ist über Seilscheiben, Rädern oder Zahnrad-Zahnstangen möglich. Es gilt

bzw.

$$v = \omega r$$

$$T = Fr$$

### 2.4.3 Getriebebemessung für durchlaufende Antriebe für einen Arbeitspunkt

Bei durchlaufenden Antrieben können die Massenträgheiten für die Bemessung vernachlässigt werden. Ausgegangen werde zunächst von den Bemessungspunkten der Last und des Antriebs: Die angetriebene Last fordere bei einer Arbeitskreisfrequenz von  $\omega_{2\text{erf}}$  das Bemessungsdrehmoment  $T_{2\text{erf}}$  bzw. die Leistung

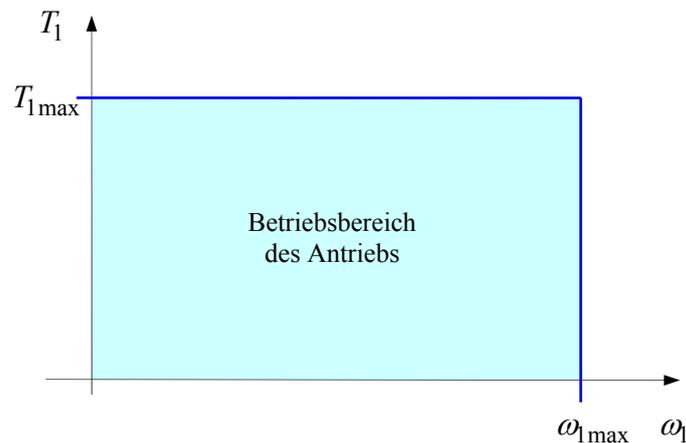
$$P_{2\text{erf}} = \omega_{2\text{erf}} T_{2\text{erf}} .$$

Der Antrieb liefere dagegen bei der Frequenz  $\omega_{1\text{max}}$  das Drehmoment  $T_{1\text{max}}$  bzw. die Leistung

$$P_{1\text{max}} = \omega_{1\text{max}} T_{1\text{max}} .$$

Dieser Bemessungspunkt sei der Eckpunkt aller möglichen Betriebspunkte des Antriebs (Beschränkung auf den motorischen Fall):

$$T_1 \leq T_{1\text{max}} , \quad \omega_1 \leq \omega_{1\text{max}}$$



Betriebsbereich des Antriebs

Voraussetzung für die weitere Auslegung ist, dass der Antrieb über eine Leistungsreserve verfügt, wenigstens aber den Leistungsbedarf der Last aufbringt:

$$P_{1\text{max}} \geq P_{2\text{erf}}$$

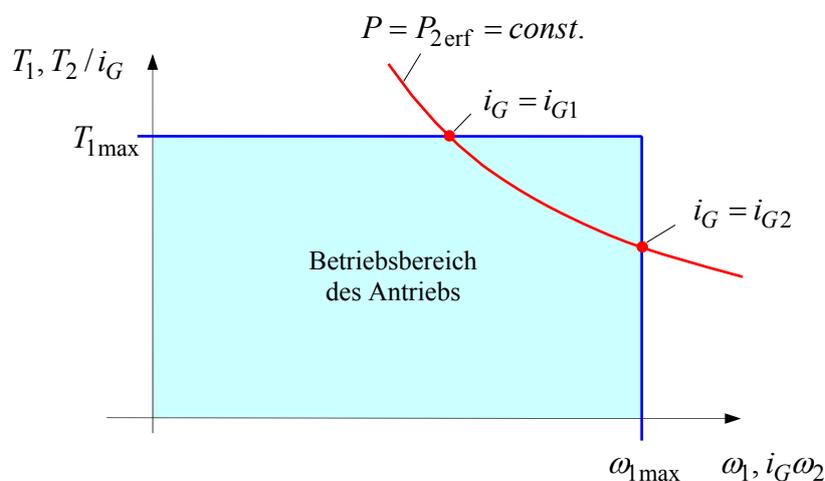
Unter Vernachlässigung der Getriebeverluste lassen sich nun zwei Übersetzungsverhältnisse finden, einmal aus dem Verhältnis der Drehmomente, sowie aus dem Verhältnis der Drehzahlen:

$$i_{G1} = \frac{T_{2\text{erf}}}{T_{1\text{max}}} \quad , \quad i_{G2} = \frac{\omega_{1\text{max}}}{\omega_{2\text{erf}}}$$

Jedes Getriebeübersetzungsverhältnis  $i_G$  im Intervall

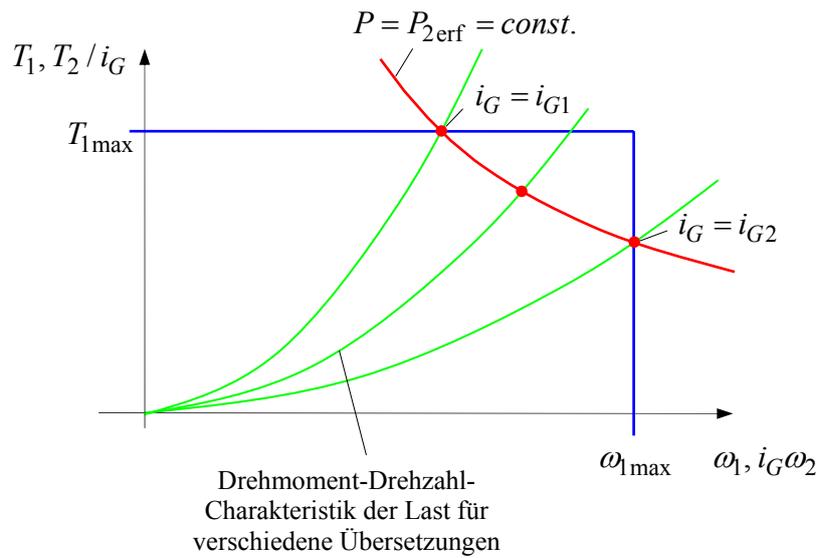
$$i_{G1} \leq i_G \leq i_{G2}$$

stellt eine mögliche Getriebeauslegung dar.



Die Auslegung  $i_G = i_{G2}$  führt zur größtmöglichen Reserve im Drehmoment, hat aber keinerlei Reserve in der Drehzahl. Umgekehrt führt die Auslegung  $i_G = i_{G1}$  zu größtmöglicher Drehzahlreserve, die aber nur dann genutzt werden kann, wenn das Lastdrehmoment mit steigender Drehzahl nicht noch weiter ansteigt, da keine Drehmomentreserve mehr vorhanden ist. Die Wahl einer kleinen Übersetzung in der Nähe von  $i_{G1}$  ist insbesondere dann von Vorteil, wenn beim Getriebe eine Übersetzungstufe eingespart werden kann und dadurch ein kleineres und kostengünstigeres Getriebe verwendet werden kann.

Jede der Getriebeauslegungen  $i_{G1} \leq i_G \leq i_{G2}$  führt nicht nur im betrachteten Bemessungspunkt, sondern im gesamten Drehzahlbereich zu einer geeigneten Anpassung sofern gewährleistet ist, dass die Drehmoment-Drehzahl-Charakteristik der Last eine monoton steigende Kennlinie aufweist.



Um die Leistungsreserve des Antriebs oberhalb des Last-Bemessungspunkts optimal nutzen zu können, sollte der Punkt

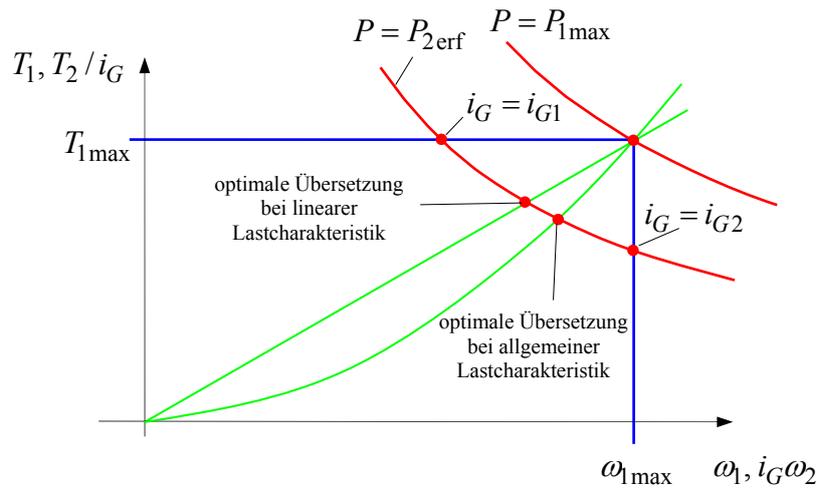
$$P_{2\max} = P_2(\omega_{2\max}) = P_{1\max}$$

bestimmt und aus der daraus ermittelten Geschwindigkeit  $\omega_{2\max}$  Punkt die Getriebeübersetzung

$$i_{G\text{opt}} = \frac{\omega_{1\max}}{\omega_{2\max}}$$

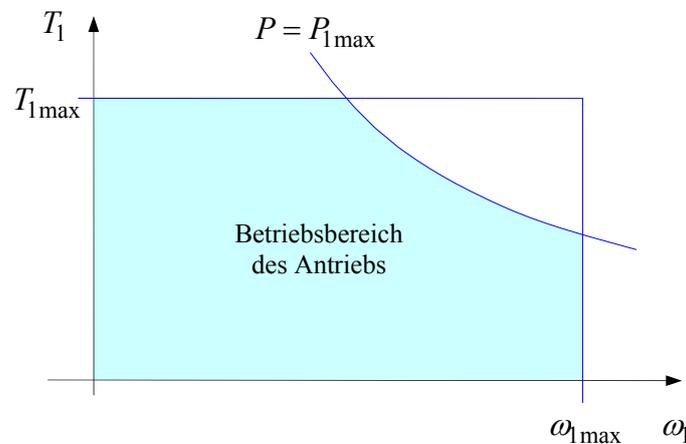
gewählt werden. Für den Spezialfall einer linearen Drehmoment-Drehzahl-Charakteristik der Last ergibt sich

$$i_{G\text{opt}} = \sqrt{i_{G1}i_{G2}} = \sqrt{\frac{T_{2\text{erf}}}{T_{1\max}} \frac{\omega_{1\max}}{\omega_{2\text{erf}}}}$$



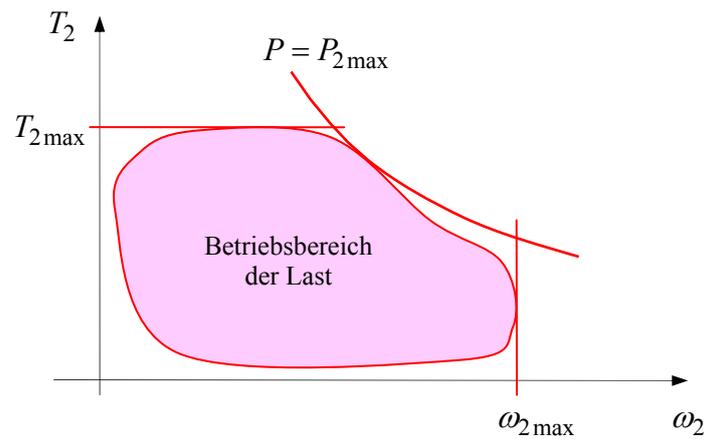
### 2.4.4 Getriebebemessung für durchlaufende Antriebe für einen Arbeitsbereich

Häufig ist der Arbeitsbereich eines elektrischen Antriebs nicht nur durch ein maximales Drehmoment und eine maximale Drehzahl, sondern zusätzlich auch durch eine maximale Leistung charakterisiert.

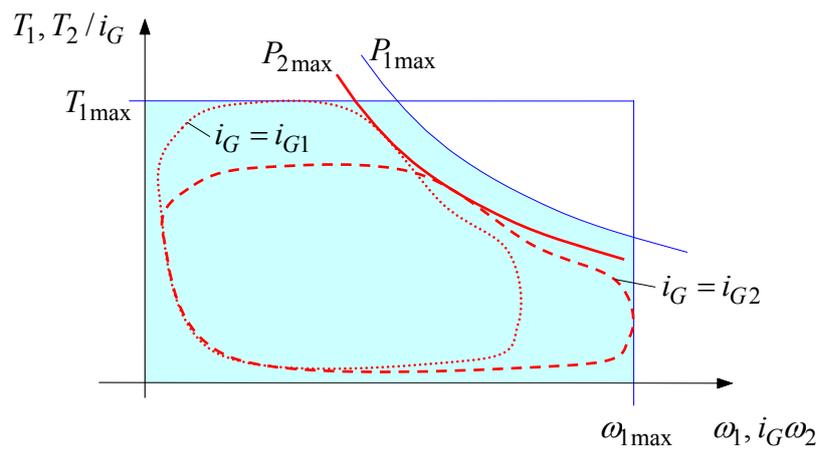


Beschränkung von Drehmoment, Drehzahl und Leistung des Antriebs

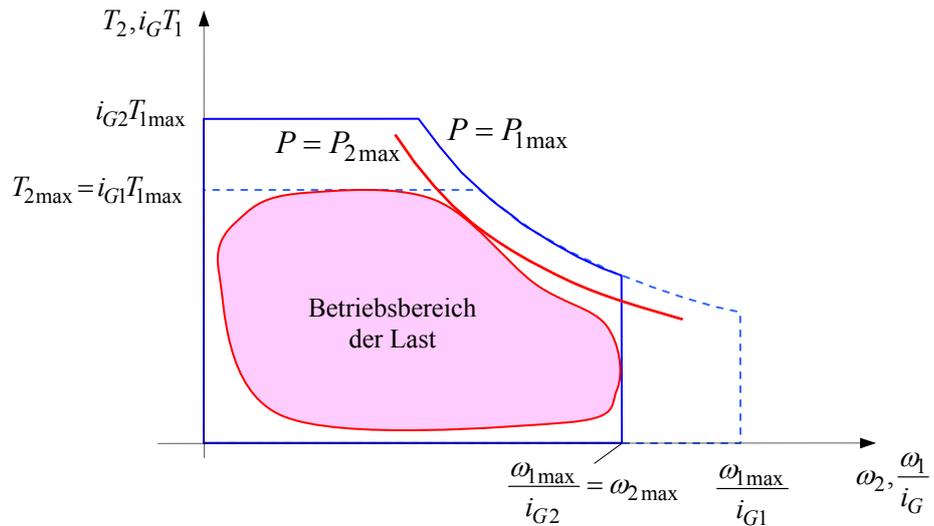
Dementsprechend ist die Last ggf. nicht nur durch einen einzigen stationären Arbeitspunkt wie im vorangegangenen Abschnitt, sondern durch mehrere Arbeitspunkte oder durch einen Arbeitsbereich charakterisiert:



Betriebsbereich der Last



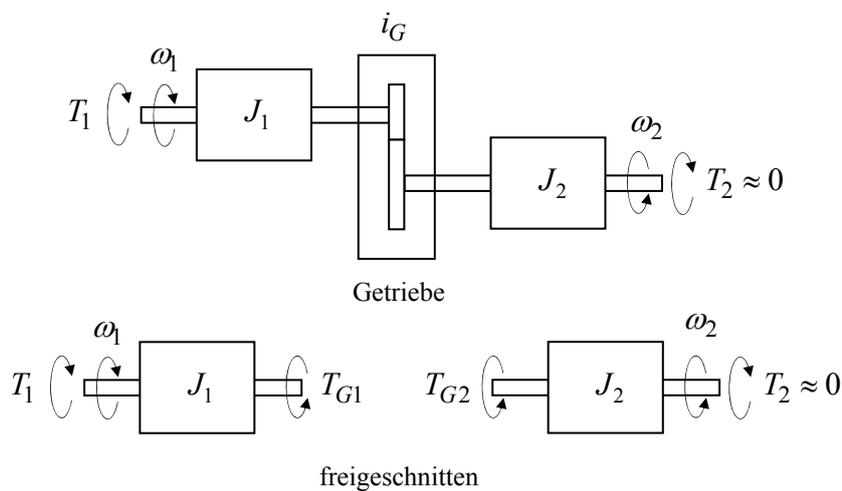
Anpassung der Betriebsbereiche von Last und Antrieb für zwei verschiedene Übersetzungsverhältnisse, dargestellt im Drehmoment-Drehzahl-Bereich des Antriebs



Anpassung der Betriebsbereiche von Last und Antrieb für zwei verschiedene Übersetzungsverhältnisse, dargestellt im Drehmoment-Drehzahl-Bereich der Last

$$i_{G1} = \frac{T_{2\max}}{T_{1\max}} \quad , \quad i_{G2} = \frac{\omega_{1\max}}{\omega_{2\max}}$$

### 2.4.5 Getriebebemessung für reine Beschleunigungsvorgänge



Modell des Antriebsstrangs für die Bemessung des Beschleunigungsantriebs

Für diesen Fall soll vereinfachend angenommen werden, dass das Antriebsdrehmoment nur zur Beschleunigung der beteiligten Massenträgheiten dient und dass keine weiteren Last-Drehmomente berücksichtigt werden müssen, also  $T_2 = 0$ . Seien  $J_1$  und  $J_2$  die Massen-

trägeitsmomente von Motor und Last, lauten die Differenzialgleichungen für die Winkelbeschleunigungen

$$J_1 \dot{\omega}_1 = T_1 - T_{G1}$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 = T_{G2} = i_G T_{G1}$$

Auflösen der ersten Gleichung nach  $T_{G1}$  und Einsetzen liefert

$$J_2 \dot{\omega}_2 = i_G T_{G1} = i_G T_1 - i_G J_1 \dot{\omega}_1 = i_G T_1 - i_G^2 J_1 \dot{\omega}_2$$

$$(i_G^2 J_1 + J_2) \dot{\omega}_2 = i_G T_1$$

$$\alpha_2 = \dot{\omega}_2 = \frac{i_G}{i_G^2 J_1 + J_2} T_1$$

Der Term

$$J'_1 = i_G^2 J_1$$

ist die auf die Lastseite umgerechnete effektive Motorträgheit. Die Frage nach dem größtmöglichen Beschleunigungsvermögen führt nun auf die Extremwertaufgabe

$$0 = \frac{d\alpha_2}{di_G} = T_1 \frac{i_G^2 J_1 + J_2 - i_G 2i_G J_1}{(i_G^2 J_1 + J_2)^2}$$

$$i_G^2 J_1 = J_2$$

und zur Bestimmung der beschleunigungsoptimalen Getriebeübersetzung

$$i_{G\text{opt}} = \sqrt{\frac{J_2}{J_1}}.$$

In diesem Fall sind die auf eine Getriebeseite umgerechneten Drehträgeiten gleich, also

$$J'_1 = J_2.$$

Bei gegebenem Antriebsdrehmoment  $T_1$  ergibt sich bei optimaler Getriebeübersetzung also eine Lastbeschleunigung von

$$\alpha_{2\text{opt}} = \frac{T_1}{2\sqrt{J_1 J_2}}$$

Das notwendige maximale Antriebsdrehmoment  $T_{1\max}$  ergibt sich demnach über diese Formel aus der gewünschten Lastbeschleunigung  $\alpha_{2\max}$ . Zunächst führen wir aber nun als Antriebs-Kenngröße das *Beschleunigungsvermögen*

$$D_{1\max} = \frac{T_{1\max}^2}{J_1}$$

ein (auch als dynamisches Leistungsvermögen bzw. power rate bezeichnet). Diese Kenngröße ist nur von den Parametern des Antriebs, nicht von der Last abhängig. Interessanterweise ist diese Größe ähnlich wie die Leistung invariant gegenüber einer Umrechnung über das Übersetzungsverhältnis, da sich beide Größen des Quotienten mit dem Quadrat des Übersetzungsverhältnisses transformieren. Damit lässt sich nun die Lastbeschleunigung bei optimaler Übersetzung als

$$\alpha_{2\text{opt max}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_{1\max}}{J_2}}$$

ausdrücken. Auch der Beschleunigungsbedarf der Last lässt sich durch die Kennzahl

$$D_{2\text{erf}} = 4\alpha_{2\text{erf}}^2 J_2$$

ausdrücken. Die Anpassung des Beschleunigungsvermögen des Antriebs an den Beschleunigungsbedarf der Last lässt sich also als

$$\alpha_{2\max} = \alpha_{2\text{erf}}$$

bzw.

$$D_{1\max} = D_{2\text{erf}}$$

schreiben. Wie bei der Leistungsanpassung im Fall von durchlaufenden Antrieben wird sich meist nicht ein exakt passender Antrieb finden oder es soll ohnehin eine Beschleunigungsreserve vorgesehen werden, so dass

$$A = \frac{\alpha_{2\max}}{\alpha_{2\text{erf}}} = \sqrt{\frac{D_{1\max}}{D_{2\text{erf}}}} > 1 .$$

In diesem Fall besteht wieder ein Spielraum in der Festlegung des tatsächlichen Getriebeübersetzungsverhältnisses  $i_G$ . Zu diesem Zweck soll zunächst die Gleichung für  $\alpha_2$  in eine auf die optimale Auslegung bezogene Form gebracht werden:

$$\alpha_2 = \frac{i_G}{i_G^2 J_1 + J_2} T_1 = \frac{1}{J_2} \frac{i_G}{i_G^2 \frac{J_1}{J_2} + 1} T_1 = \frac{T_1}{\sqrt{J_1 J_2}} \frac{i_G \sqrt{\frac{J_1}{J_2}}}{i_G^2 \frac{J_1}{J_2} + 1}$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_{2\text{opt}}} = 2 \frac{i_G / i_{G\text{opt}}}{(i_G / i_{G\text{opt}})^2 + 1} = \frac{2i'}{i'^2 + 1},$$

wobei

$$i' = \frac{i_G}{i_{G\text{opt}}}$$

die Abweichung von der optimalen Auslegung bezeichnet. Die Auflösung der Gleichung

$$\frac{1}{A} = 2 \frac{i'}{i'^2 + 1}$$

nach  $i'$  liefert

$$i'^2 - 2Ai' + 1 = 0$$

$$i'_{1,2} = A \pm \sqrt{A^2 - 1}$$

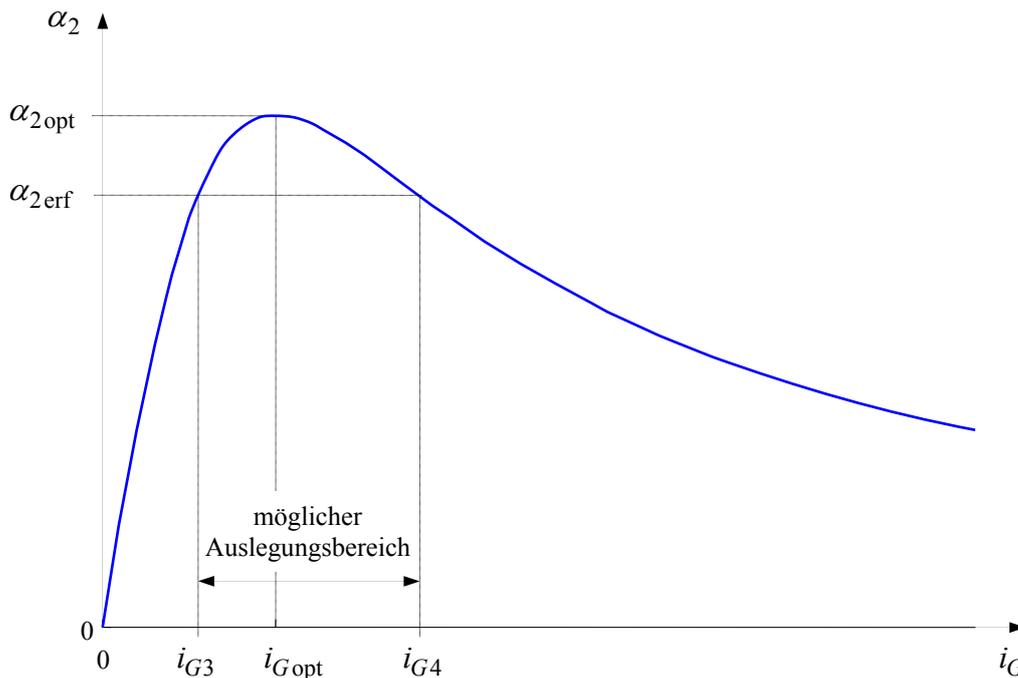
bzw.

$$i_{G3} = i_{G\text{opt}} \left( A - \sqrt{A^2 - 1} \right), \quad i_{G4} = i_{G\text{opt}} \left( A + \sqrt{A^2 - 1} \right)$$

Jede Auslegung

$$i_{G3} \leq i_G \leq i_{G4}$$

erfüllt die Beschleunigungsanforderung.



Beschleunigung in Abhängigkeit von der Getriebeübersetzung

Das oben eingeführte Beschleunigungsvermögen

$$D_{1\max} = \frac{T_{1\max}^2}{J_1}$$

soll noch näher betrachtet werden. Wie schon erwähnt, ist diese Größe invariant gegenüber einer Umrechnung von Drehmoment und Trägheit über ein Getriebeübersetzungsverhältnis. Interpretiert man in obiger Definition den Quotienten  $T_{1\max} / J_1$  als Beschleunigung  $\alpha_{1\max}$ , die sich ergibt, wenn der Motor *ohne Last* nur seine eigene Drehträgheit beschleunigen muss, lässt sich  $D_{\max}$  als Produkt von Beschleunigung und Drehmoment,

$$D_{1\max} = \alpha_{1\max} T_{1\max}$$

schreiben. Auch diese Darstellung ist weiterhin invariant gegenüber Umrechnungen über ein Übersetzungsverhältnis. Eine weitere Interpretation des Beschleunigungsvermögens  $D_{1\max}$  gewinnt man aus

$$D_{1\max} = \dot{\omega}_{1\max} T_{1\max} = \frac{d\omega_{1\max}}{dt} T_{1\max} = \frac{d(\omega_{1\max} T_{1\max})}{dt} = \frac{dP_{1\max}}{dt} = \dot{P}_{1\max}.$$

Das Beschleunigungsvermögen gibt also auch an, mit welcher Änderungsrate die mechanische Leistung beim Beschleunigen ansteigt. Das erklärt die englische Bezeichnung *power rate*.

Hier wird eine wichtige Analogie sichtbar. Während bei der Bemessung für den durchlaufenden Antrieb die Leistung des Antriebs  $P_{1\max}$  passend zur Last zu wählen ist, tritt bei der Auslegung des Beschleunigungsantriebs an diese Stelle die Zeitableitung der Leistung  $D_{1\max} = \dot{P}_{1\max}$ . Wie die Leistung selbst, die einer Bilanzgleichung gehorcht, kann auch die Änderungsrate bilanziert werden. Die vom Antrieb abgegebene Änderungsrate wird von der Trägheit der Last aufgenommen.

#### 2.4.6 Getriebebemessung für Beschleunigungsvorgänge mit Lastdrehmoment

Wird das Lastdrehmoment  $T_2$  nicht vernachlässigt, lauten die Gleichungen für die Beschleunigung:

$$J_1\alpha_1 = T_1 - T_{G1} = T_1 - T_{G2}/i_G$$

$$J_2\alpha_2 = T_{G2} - T_2 = i_G T_{G1} - T_2$$

$$J_2\alpha_2 = i_G T_1 - i_G J_1 \dot{\alpha}_1 - T_2 = i_G T_1 - i_G^2 J_1 \alpha_2 - T_2$$

$$(i_G^2 J_1 + J_2)\alpha_2 = i_G T_1 - T_2$$

$$\alpha_2 = \frac{i_G T_1 - T_2}{i_G^2 J_1 + J_2}$$

Die Suche nach der größtmöglichen Lastbeschleunigung wird wieder über eine Extremwertbestimmung gelöst:

$$0 = \frac{d\alpha_2}{di_G} = \frac{T_1(i_G^2 J_1 + J_2) - (i_G T_1 - T_2)2i_G J_1}{(i_G^2 J_1 + J_2)^2}$$

$$0 = i_G^2 J_1 + J_2 - (i_G - T_2/T_1)2i_G J_1$$

$$i_G^2 - 2\frac{T_2}{T_1}i_G - \frac{J_2}{J_1} = 0$$

Die quadratische Gleichung hat eine positive und eine negative Lösung,

$$\tilde{i}_{G\text{opt}1,2} = \frac{T_2}{T_1} \pm \sqrt{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 + \frac{J_2}{J_1}},$$

wobei für den normalen Fall des Antriebes nur die positive Lösung relevant ist. Auf den Index kann also verzichtet werden:

$$\begin{aligned}
\tilde{i}_{G\text{opt}} &= \frac{T_2}{T_1} + \sqrt{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 + \frac{J_2}{J_1}} \\
&= \sqrt{\frac{J_2}{J_1}} \left[ \sqrt{\frac{J_1 T_2^2}{J_2 T_1^2}} + \sqrt{\frac{J_1 T_2^2}{J_2 T_1^2} + 1} \right] \\
&= i_{G\text{opt}} \left[ \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} + \sqrt{\frac{D_2}{D_1} + 1} \right]
\end{aligned}$$

wobei

$$D_1 = \frac{T_1^2}{J_1}, \quad D_2 = \frac{T_2^2}{J_2}$$

$$\tilde{i}_{G\text{opt}} = i_{G\text{opt}} \left[ \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} + \sqrt{\frac{D_2}{D_1} + 1} \right]$$

Die optimale Übersetzung verschiebt sich also bei zusätzlichem Lastdrehmoment im Vergleich zur unbelasteten Beschleunigung zu höheren Werten. Das Einsetzen in die Gleichung für die Lastbeschleunigung ergibt dann die optimale Beschleunigung

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_{2\text{opt}} &= \frac{T_1}{2J_1} \frac{1}{\frac{T_2}{T_1} + \sqrt{\frac{T_2^2}{T_1^2} + \frac{J_2}{J_1}}} \\
&= \frac{T_1^2}{2J_1 \sqrt{J_2}} \frac{1}{\frac{T_2}{\sqrt{J_2}} + \sqrt{\frac{T_2^2}{J_2} + \frac{T_1^2}{J_1}}} \\
&= \frac{D_1}{2\sqrt{J_2}} \frac{1}{\sqrt{D_2} + \sqrt{D_1 + D_2}} \\
&= \alpha_{2\text{opt}} \frac{\sqrt{D_1}}{\sqrt{D_2} + \sqrt{D_1 + D_2}}
\end{aligned}$$

Wird der Antrieb nicht genau auf das optimale Übersetzungsverhältnis bemessen, sondern soll eine Beschleunigungsreserve vorgesehen werden, bietet sich folgendes Vorgehen an: Bei konstanter Beschleunigung kann das Lastdrehmoment in eine äquivalente zusätzliche Lastträgheit umgerechnet werden. Hierfür wird die minimale erforderliche Beschleunigung benutzt:

$$\check{J}_2 = J_2 + \frac{T_2}{\alpha_{2\text{erf}}}$$

Das erforderliche Beschleunigungsvermögen ergibt sich dann zu

$$\check{D}_{2\text{erf}} = 4\alpha_{2\text{erf}}^2 \check{J}_2 = 4\alpha_{2\text{erf}} (\alpha_{2\text{erf}} J_2 + T_2)$$

Der zu wählende Antrieb muss also ein Beschleunigungsvermögen

$$D_{1\text{max}} = \frac{T_{1\text{max}}^2}{J_1} \geq \check{D}_{2\text{erf}}$$

aufweisen. Der Spielraum für die Wahl der Getriebeübersetzung bei einer Beschleunigungsreserve

$$\check{A} = \frac{D_{1\text{max}}}{\check{D}_{2\text{erf}}}$$

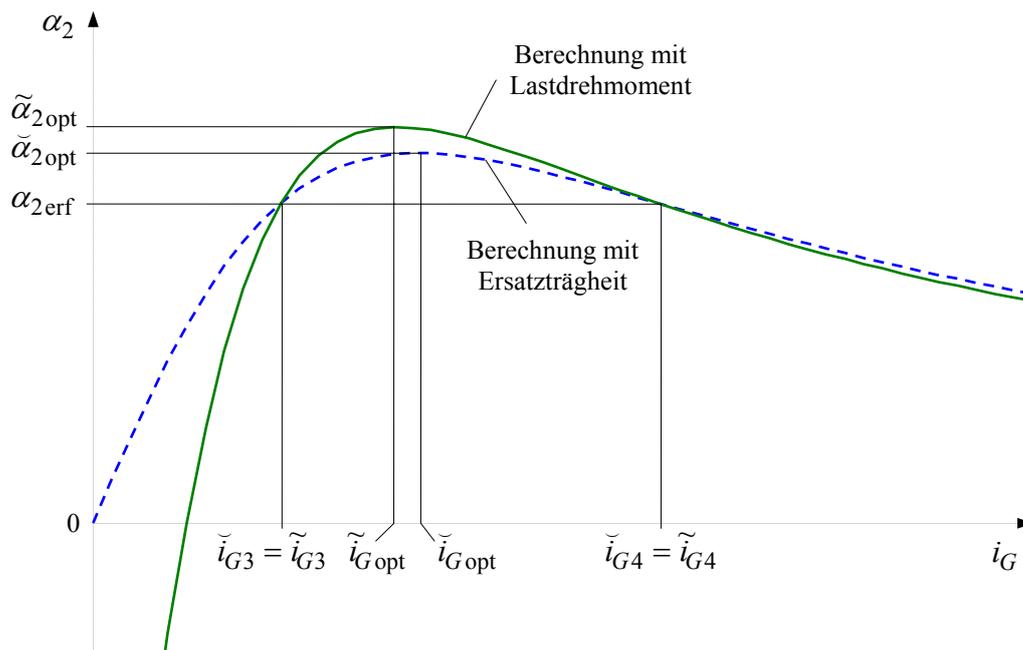
ergibt sich wie im vorangegangenen Abschnitt zu

$$\check{i}_{G3} = \check{i}_{G\text{opt}} \left( \check{A} - \sqrt{\check{A}^2 - 1} \right), \quad \check{i}_{G4} = \check{i}_{G\text{opt}} \left( \check{A} + \sqrt{\check{A}^2 - 1} \right),$$

wobei aber

$$\check{i}_{G\text{opt}} = \sqrt{\frac{\check{J}_2}{J_1}}$$

zu verwenden ist, nicht etwa  $\check{i}_{G\text{opt}}$ . Durch die Verwendung einer zusätzlichen Ersatz-Trägheit statt des eigentlich vorhandenen Lastdrehmoments wird die tatsächliche Beschleunigung für  $\alpha_2 > \alpha_{2\text{erf}}$  unterschätzt, für  $\alpha_2 < \alpha_{2\text{erf}}$  dagegen überschätzt, da zur Beschleunigung der Ersatzträgheit mit einer Winkelbeschleunigung  $\alpha_2 > \alpha_{2\text{erf}}$  ein höheres Drehmoment als das ersetzte Lastdrehmoment benötigt würde (und umgekehrt). Die Auslegung für  $\alpha_2 = \alpha_{2\text{erf}}$  liefert jedoch exakte Werte (s. Bild).



Beschleunigung in Abhängigkeit von der Getriebübersetzung  
für Beschleunigungsvorgänge mit Lastdrehmoment

### 2.4.7 Getriebebemessung für durchlaufenden Betrieb und Beschleunigungsvorgänge

In vielen Fällen muss ein Antrieb sowohl Spezifikationen für den durchlaufenden Betrieb als auch für die Beschleunigungsphasen erfüllen. Insofern sind beide Entwurfschritte für den durchlaufenden Betrieb als auch für Beschleunigungsvorgänge durchzuführen und zu prüfen, ob die Lösungsintervalle nicht-leere Schnittmengen aufweisen,

$$I = [i_{G1}, i_{G2}] \cap [i_{G3}, i_{G4}] \quad \text{bzw.} \quad I = [i_{G1}, i_{G2}] \cap [\tilde{i}_{G3}, \tilde{i}_{G4}].$$

Parameter der Motorauswahl sind dabei zunächst die Leistung  $P_{1\max}$  und das Beschleunigungsvermögen  $D_{1\max}$ , die in einem ersten Entwurfschritt möglichst mit nur geringer Reserve gewählt werden. Ergibt sich dann kein gemeinsamer Lösungsbereich für beide Anforderungen, sollte im Fall  $i_{G2} < i_{G3}$  zunächst versucht werden, Motoren gleicher Leistungsdaten, aber größerer Frequenz  $\omega_{1\max}$  bzw. geringeren Drehmoments  $T_{1\max}$  bzw. größerer Trägheit  $J_1$  zu wählen, im Fall  $i_{G1} > i_{G4}$  umgekehrt. Führt das nicht zum Erfolg, müssen größere Reserven für Leistung und Beschleunigungsvermögen in Kauf genommen werden, wobei eine große Reserve immer auch eine Überdimensionierung darstellt, die sich in Größe und Kosten des Antriebs bemerkbar machen wird. Falls sich zu große Diskrepanzen herausstellen, müssen ggf. die Anforderungen überdacht und korrigiert werden.

## 2.5 Lastkennlinien

In diesem Abschnitt sollen exemplarisch einige Beispiele für das stationäre Drehmoment-Drehzahl-Verhalten verschiedener Belastungen dargestellt werden.

### 2.5.1 Trockene Reibung

Die trockene Reibung ist durch eine geschwindigkeitsunabhängig Kraft gekennzeichnet,

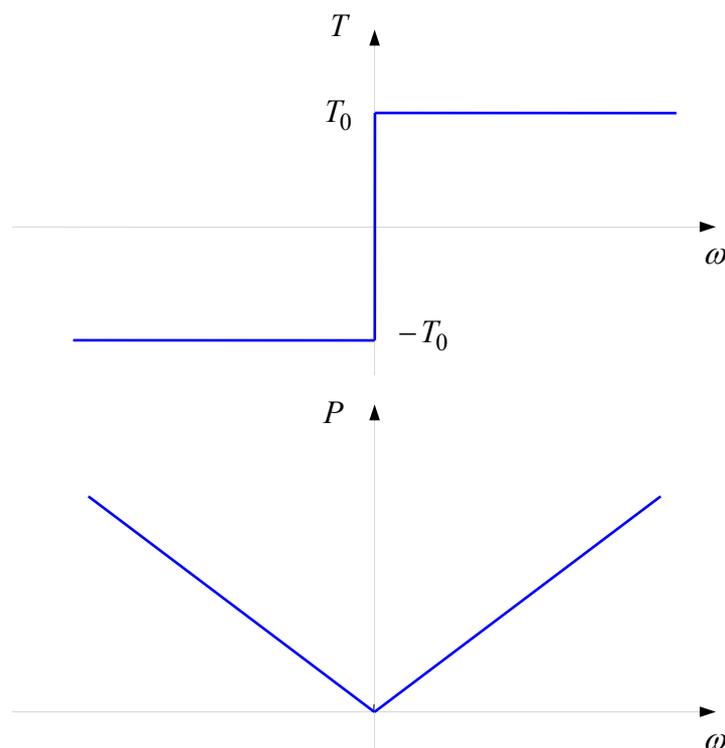
$$F = F_0 \operatorname{sgn}(v),$$

bzw.

$$T = T_0 \operatorname{sgn}(\omega).$$

Die von der Last aufgenommene Leistung ist

$$P = \omega T = \omega T_0 \operatorname{sgn}(\omega) = T_0 |\omega|$$



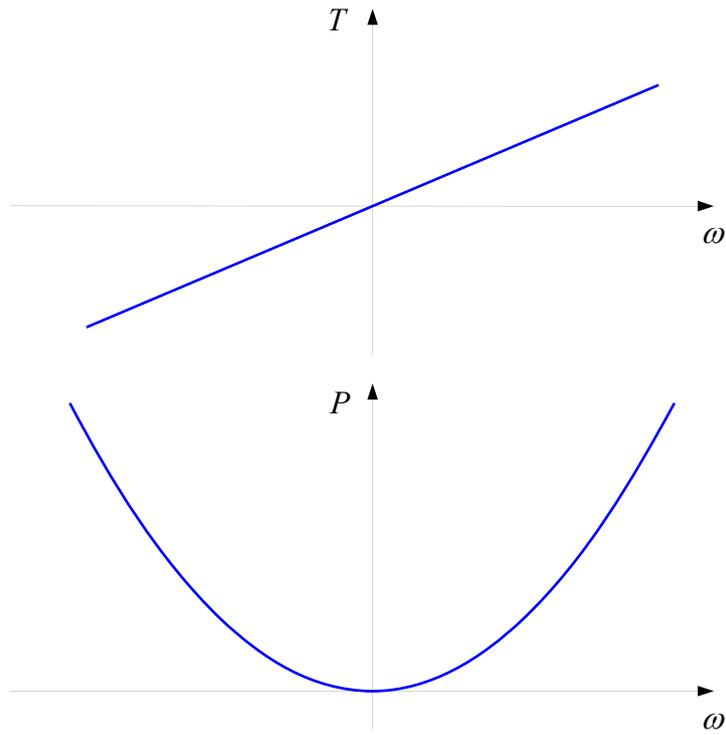
Drehmoment und Leistung für trockene Reibung

## 2.5.2 Viskose Reibung

Bei der viskosen Reibung sind Kraft bzw. Drehmoment proportional zur Geschwindigkeit:

$$T = D\omega$$

$$P = D\omega^2$$

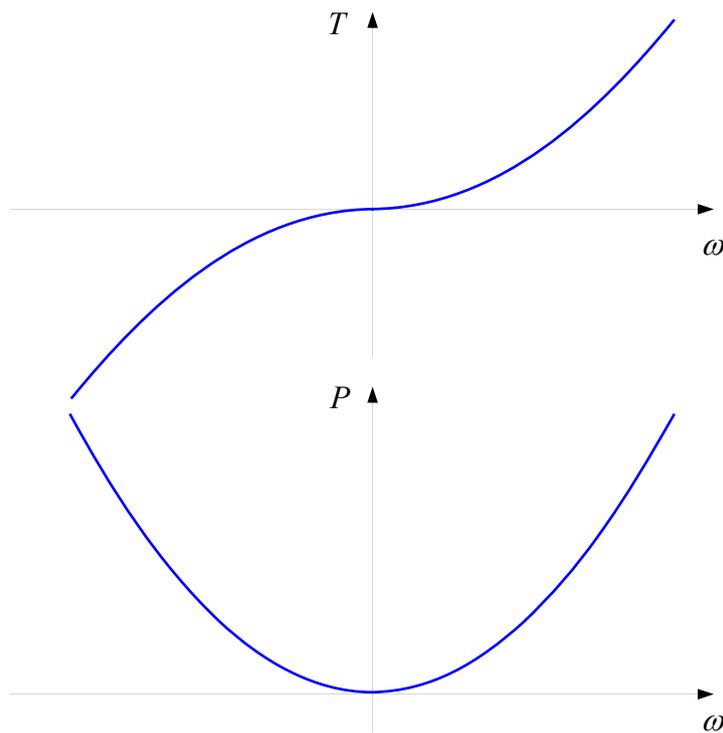


### 2.5.3 Lüfter

Lüfter und andere aero- und hydrodynamische Prozesse (z. B. Windwiderstand) haben quadratische Lastkennlinien:

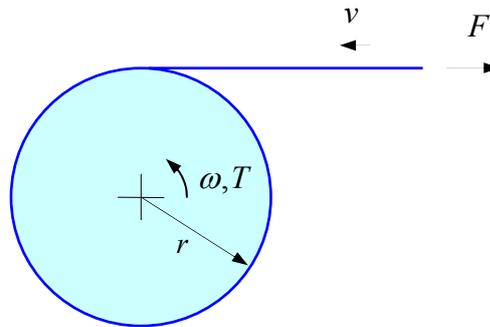
$$T = c\omega^2 \operatorname{sgn}(\omega)$$

$$P = c|\omega^3|$$



### 2.5.4 Wickler, Haspel

Als Beispiel für ein etwas komplexeres System soll ein Wickler oder eine Haspel betrachtet werden, welcher die Aufgabe hat, ein Band (Blech, Textil, Folie) oder einen Draht unter definiertem Zug aufzuwickeln. Der Radius der Rolle wächst im Laufe der Zeit an (bzw. reduziert sich beim Abwickeln).



Wickler

Bei der Aufstellung der Drehimpulsbilanz ist besondere Sorgfalt geboten: Zum einen verändert sich mit über das aufgewickelte Wickelgut das Massenträgheitsmoment  $J$ . Zum anderen wird dem Wickel auf diese Weise Masse sowie Impuls bzw. Drehimpuls zugeführt. Die vollständige Drehimpulsbilanz lautet also hier

$$\frac{d}{dt}(J\omega) = T - rF + k,$$

wobei  $T - rF$  die Summe der angreifenden Drehmomente und  $k$  die Zufuhr rate des Drehimpulses ist. Diese bestimmt sich über ein aufzuwickelndes Element der infinitesimalen Länge  $dx$ , welches den linearen Impuls  $dp = v \rho dx$  besitzt, zu

$$k = r \frac{dp}{dt} = r \rho v \frac{dx}{dt} = r \rho v^2 = \rho \omega^2 r^3.$$

Hierbei  $\rho$  die längenspezifische Masse des Materials. Die Auswertung der Drehimpulsbilanz führt also zu

$$J\dot{\omega} + \dot{J}\omega = T - rF + \rho \omega^2 r^3.$$

Wird angenommen, dass das bereits aufgewickelte Gut durch zusätzliche Lagen nicht weiter komprimiert wird, ist die Zunahme des Massenträgheitsmoment aber gerade durch

$$\dot{J} = r^2 \frac{dm}{dt} = r^2 \rho v = r^3 \rho \omega$$

gegeben, wodurch sich die betreffenden Terme auf beiden Seiten der Gleichung aufheben und so trotz veränderlichem Massenträgheitsmoment

---

$$J\dot{\omega} = T - rF$$

folgt. Der über das Bandmaterial zugeführte Impuls entspricht also genau der Massenzufuhr.

Vernachlässigt man bei einer quasistationären Betrachtung die zeitliche Änderung der Drehfrequenz, folgt

$$T = rF$$

Arbeitet der Wickler mit konstanter Bandgeschwindigkeit  $v$  und konstantem Bandzug  $F$ , ergibt sich der Zusammenhang zwischen Drehmoment und Drehgeschwindigkeit:

$$T = \frac{vF}{\omega}$$

Bei diesem Betrieb ist die Leistung stets konstant:

$$P = \omega T = vF .$$

Beim Aufwickeln muss der Antrieb motorisch, beim Abwickeln generatorisch arbeiten.

### 2.5.5 Traktionsantrieb

Berücksichtigung von Luftwiderstand  $F_l$ , Rollreibung  $F_r$ , Hangabtriebskraft  $F_g$  führt auf die Widerstandskraft

$$\begin{aligned} F_w &= F_l + F_r + F_g \\ &= \frac{1}{2} \rho_l c_w A_F v^2 + c_r mg \cos \gamma + mg \sin \gamma \end{aligned}$$

Die Darstellung der Widerstandskraft über der Geschwindigkeit wird als Widerstands-Geschwindigkeits-Diagramm bezeichnet.

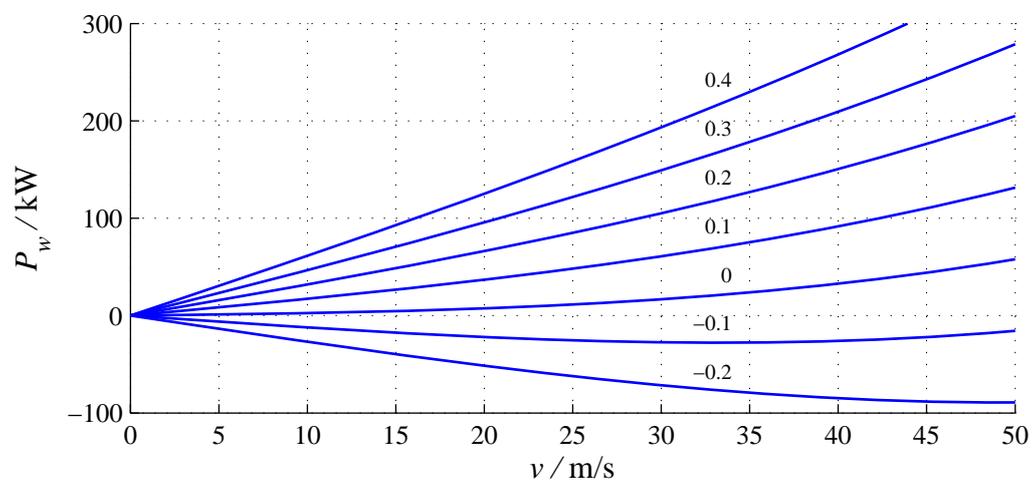
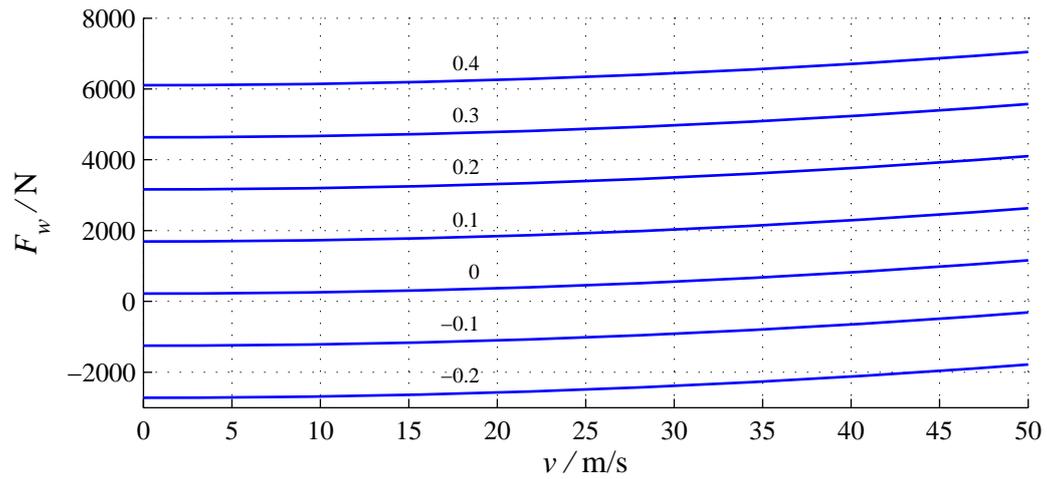
- $\rho_l$  spezifische Dichte der Luft
- $A_F$  wirksame Querschnittfläche des Fahrzeugs
- $c_w$  Luftwiderstandsbeiwert
- $c_r$  Rollwiderstandsbeiwert
- $g$  Gravitationsfeldstärke (Erdbeschleunigung)
- $\gamma$  Steigungswinkel

Dynamische Gleichung für die Fahrzeugbewegung:

$$m\dot{v} = F_a - F_w$$

Im stationären Fall (Beharrungsfahrt) muss die Antriebskraft gleich den Widerstandskräften sein:

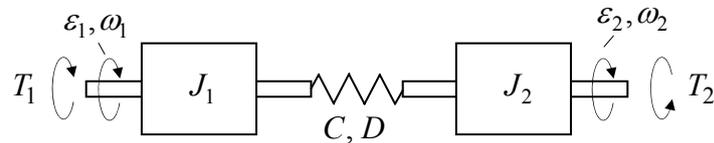
$$F_a = F_w$$



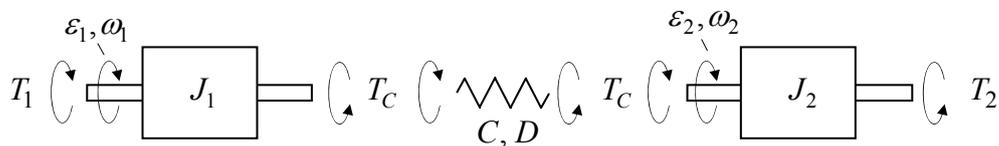
Lastkennlinien eines Fahrzeugs für verschiedene Steigungen  
 Parameter der Kurvenscharen ist die Steigung  $\tan \gamma$ ,  
 Beispielfahrzeug mit  $m = 1500\text{kg}$ ,  $c_w = 0,3$ ,  $A = 2\text{m}^2$ ,  $c_r = 0,015$

## 2.6 Schwingungsfähiger Antriebsstrang

Jeder Antriebsstrang ist aufgrund der mechanischen Elastizität mehr oder weniger schwingungsfähig. Modellierung als Zwei-Massen-System:



Modell eines schwingungsfähigen Antriebsstrangs



Vollständig freigeschnittene Systemkomponenten

Kinematik:

$$\omega_1 = \dot{\varepsilon}_1, \quad \omega_2 = \dot{\varepsilon}_2$$

Dynamische Gleichungen:

$$J_1 \dot{\omega}_1 = T_1 - T_C$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 = T_C - T_2$$

Federgesetz (mit Berücksichtigung einer Dämpfung):

$$T_C = -C(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - D(\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_1)$$

Transformation in den Laplace-Bereich führt zu:

$$s^2 J_1 \varepsilon_1(s) = T_1(s) - T_C(s)$$

$$s^2 J_2 \varepsilon_2(s) = T_C(s) - T_2(s)$$

$$T_C(s) = -(C + sD)(\varepsilon_2(s) - \varepsilon_1(s)) = -(C + sD)\Delta\varepsilon(s)$$

mit

$$\Delta\varepsilon(s) = \varepsilon_2(s) - \varepsilon_1(s)$$

Zusammenfassung:

$$s^2 \Delta\varepsilon(s) = -\frac{T_1(s)}{J_1} - \frac{T_2(s)}{J_2} - \left( \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right) (C + sD) \Delta\varepsilon(s)$$

$$(J's^2 + sD + C) \Delta\varepsilon(s) = -\frac{J'}{J_1} T_1(s) - \frac{J'}{J_2} T_2(s)$$

$$\Delta\varepsilon(s) = -\frac{1}{J_1 + J_2} \frac{J_2 T_1(s) + J_1 T_2(s)}{J's^2 + sD + C} = -\frac{1}{J's^2 + sD + C} \left[ \frac{J'}{J_1} T_1(s) + \frac{J'}{J_2} T_2(s) \right]$$

bzw.

$$T_C(s) = \frac{sD + C}{J's^2 + sD + C} \left[ \frac{J'}{J_1} T_1(s) + \frac{J'}{J_2} T_2(s) \right]$$

mit

$$J' = \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2}$$

Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$s_{1,2} = -\frac{D}{2J'} \pm j \sqrt{\frac{C}{J'} - \frac{D^2}{4J'^2}} = -d\omega_0 \pm \sqrt{\omega_0^2 - d^2}$$

mit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J'}}, \quad d = \frac{D}{2J'\omega_0} = \frac{D}{2\sqrt{J'C}}$$

Typische Eigenschwingungsfrequenzen liegen bei

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 5 \dots 50 \text{ Hz}$$

Mit diesen Kennwerten können die Übertragungsfunktionen in die Normalformen gebracht werden:

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon(s) &= -\frac{1}{s^2 + 2sd\omega_0 + \omega_0^2} \left[ \frac{1}{J_1} T_1(s) + \frac{1}{J_2} T_2(s) \right] \\ &= -G_\varepsilon(s) \left[ \frac{1}{J_1} T_1(s) + \frac{1}{J_2} T_2(s) \right]\end{aligned}$$

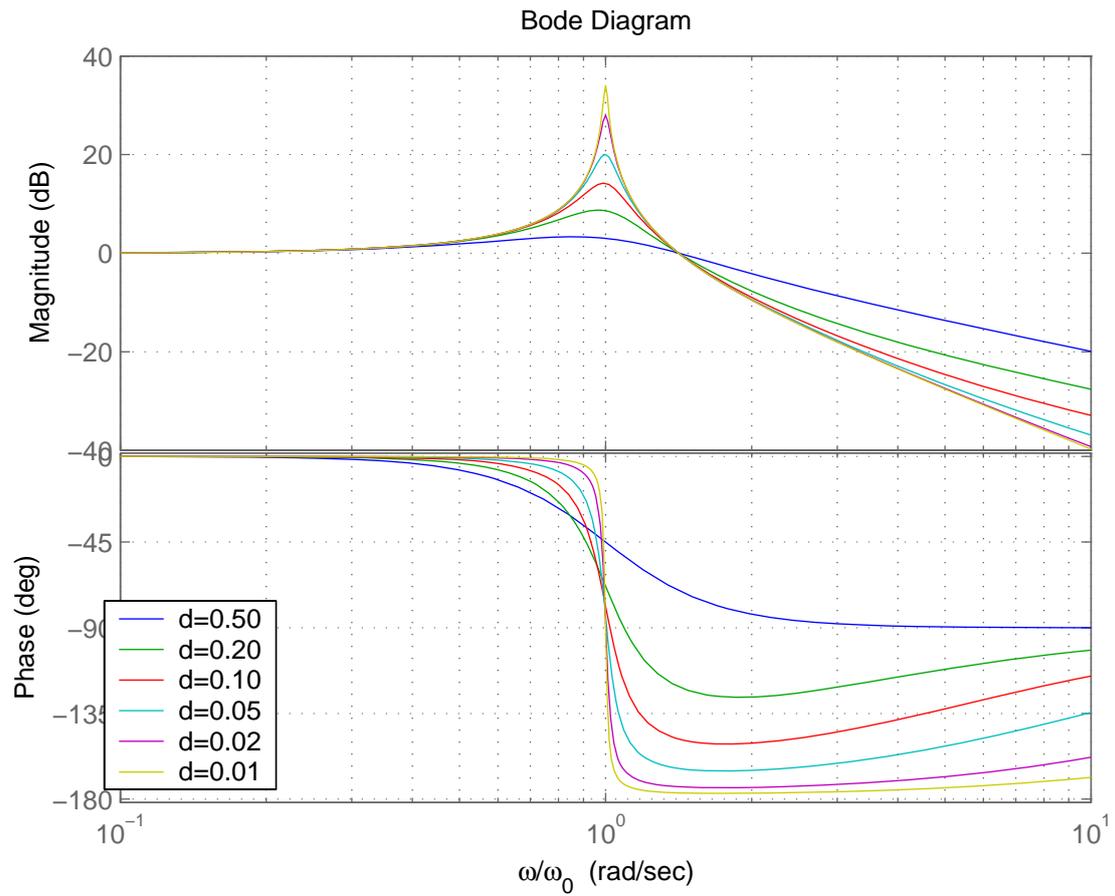
$$\begin{aligned}T_C(s) &= \frac{2sd\omega_0 + \omega_0^2}{s^2 + 2sd\omega_0 + \omega_0^2} \left[ \frac{J'}{J_1} T_1(s) + \frac{J'}{J_2} T_2(s) \right] \\ &= G_T(s) \left[ \frac{J'}{J_1} T_1(s) + \frac{J'}{J_2} T_2(s) \right]\end{aligned}$$

mit

$$G_\varepsilon(s) = \frac{1}{s^2 + 2sd\omega_0 + \omega_0^2} \quad \text{und} \quad G_T(s) = \frac{2sd\omega_0 + \omega_0^2}{s^2 + 2sd\omega_0 + \omega_0^2}.$$

Eine Resonanzstelle tritt bei den Übertragungsfunktionen  $G_\varepsilon(s)$  und  $G_T(s)$  für sehr kleine Dämpfung  $d \ll 1$  bei  $s \approx j\omega_0$  auf. Die Resonanzüberhöhung ist

$$G_\varepsilon(j\omega_0) \approx \frac{1}{2d\omega_0^2} \quad \text{und} \quad G_T(j\omega_0) \approx \frac{1}{2d}$$

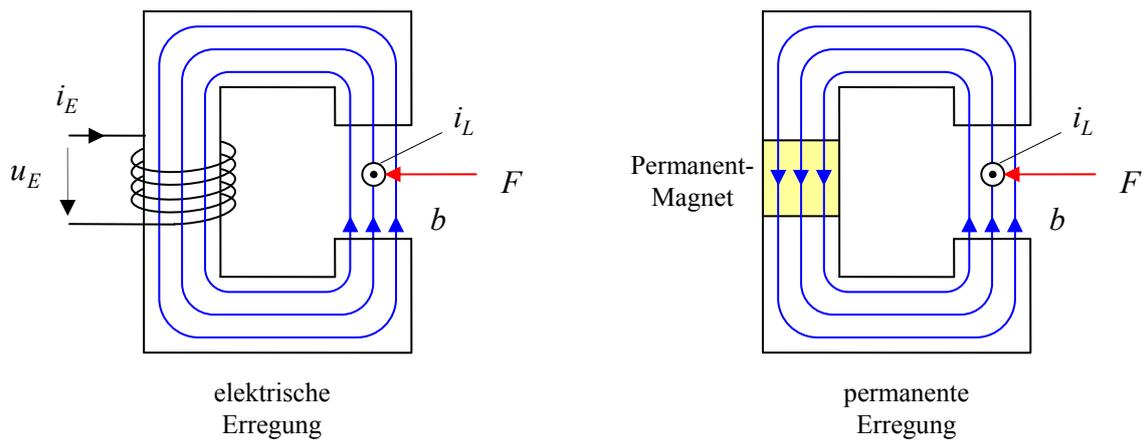


Bodediagramm der Verstärkungsfunktion  $G_T(j\omega)$  für verschiedene Dämpfungen

### 3 Gleichstrommotor



#### 3.1 Wirkprinzip

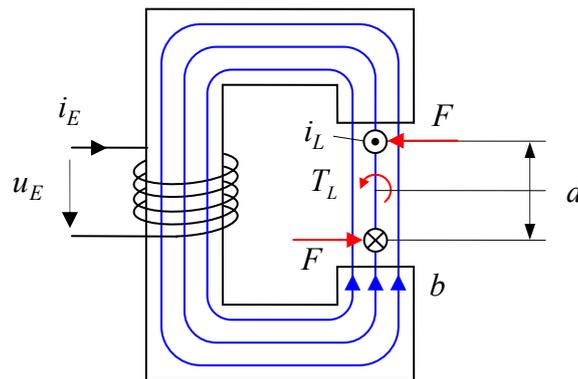


#### Wirkprinzip

Kraftwirkung auf den stromdurchflossenen Leiter (*Lorentzkraft*):

$$F = i_L b l$$

$l$ : Länge des Leiters



Drehmoment auf Leiterschleife

*Drehmoment (torque):*

$$T_L = 2F \frac{d}{2} = Fd = i_L b d l$$

Induzierte Spannung in der Leiterschleife, entweder aus Induktionsgesetz:

$$u_L = \dot{\psi}_L = 2b \frac{d}{2} \omega l = b d l \omega$$

oder aus der Leistungsbilanz:

$$p_{el} = p_{mech}$$

$$u_L i_L = T_L \omega = i_L b d l \omega$$

$$u_L = b d l \omega$$

Der Term

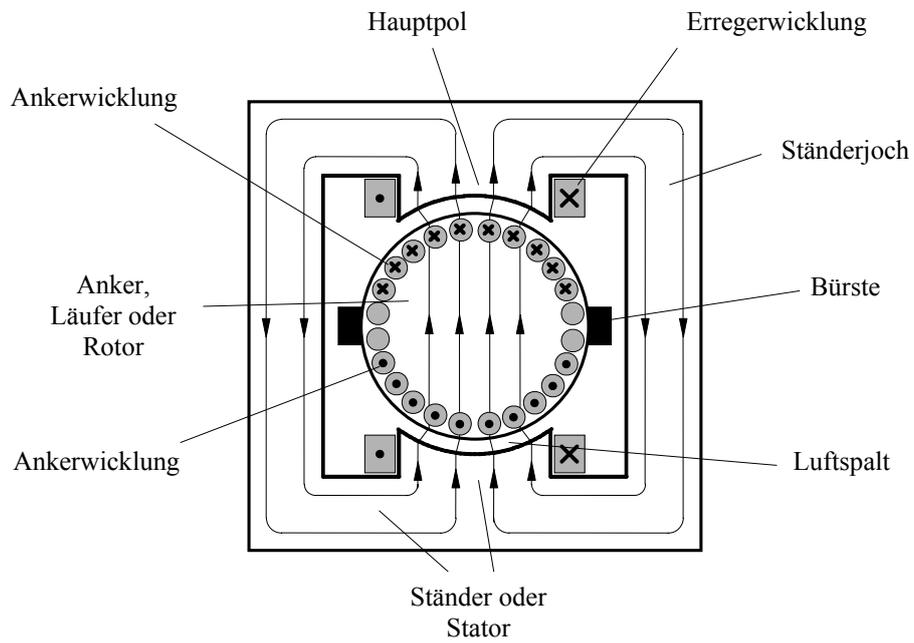
$$\phi_0 = b d l$$

lässt sich als der magnetische Fluss deuten, der die Leiterschleife bei senkrechter Ausrichtung und bei homogener Flussdichte durchdringen würde. Hiermit:

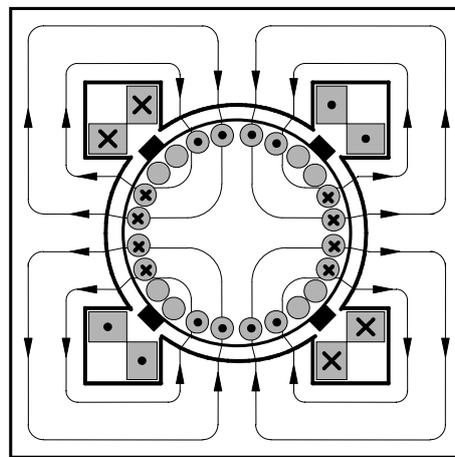
$$u_L = \phi_0 \omega$$

$$T_L = \phi_0 i_L$$

### 3.2 Aufbau

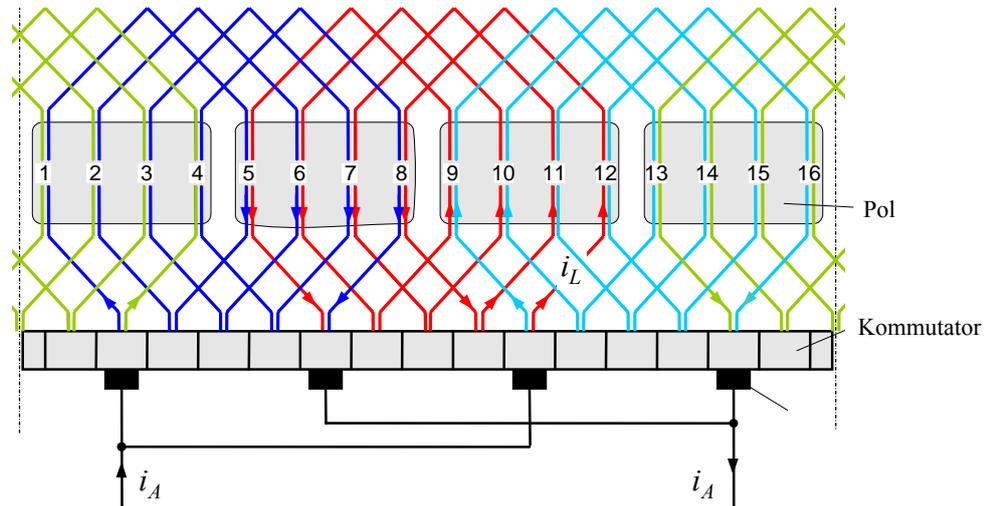


Schnittskizze eines Gleichstrommotors

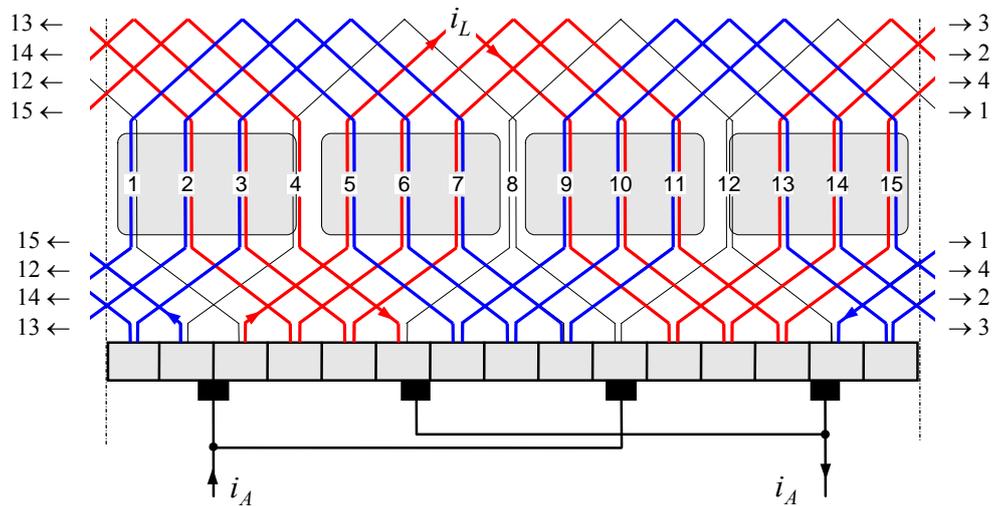


Gleichstrommotor mit zwei Polpaaren,  $p = 2$

### 3.3 Kommutator und Ankerwicklungsschemata



Wicklungsschema des Ankers  
 Schleifenwicklung, hier für  $p = 2$ ,  
 Zahl der parallelen Zweige  $2a = 2p$



Wicklungsschema des Ankers  
 Wellenwicklung, hier für  $p = 2$ ,  
 Zahl der parallelen Zweige  $2a = 2$

### 3.4 Kommutierung und Wendepolwicklung

Stichworte:

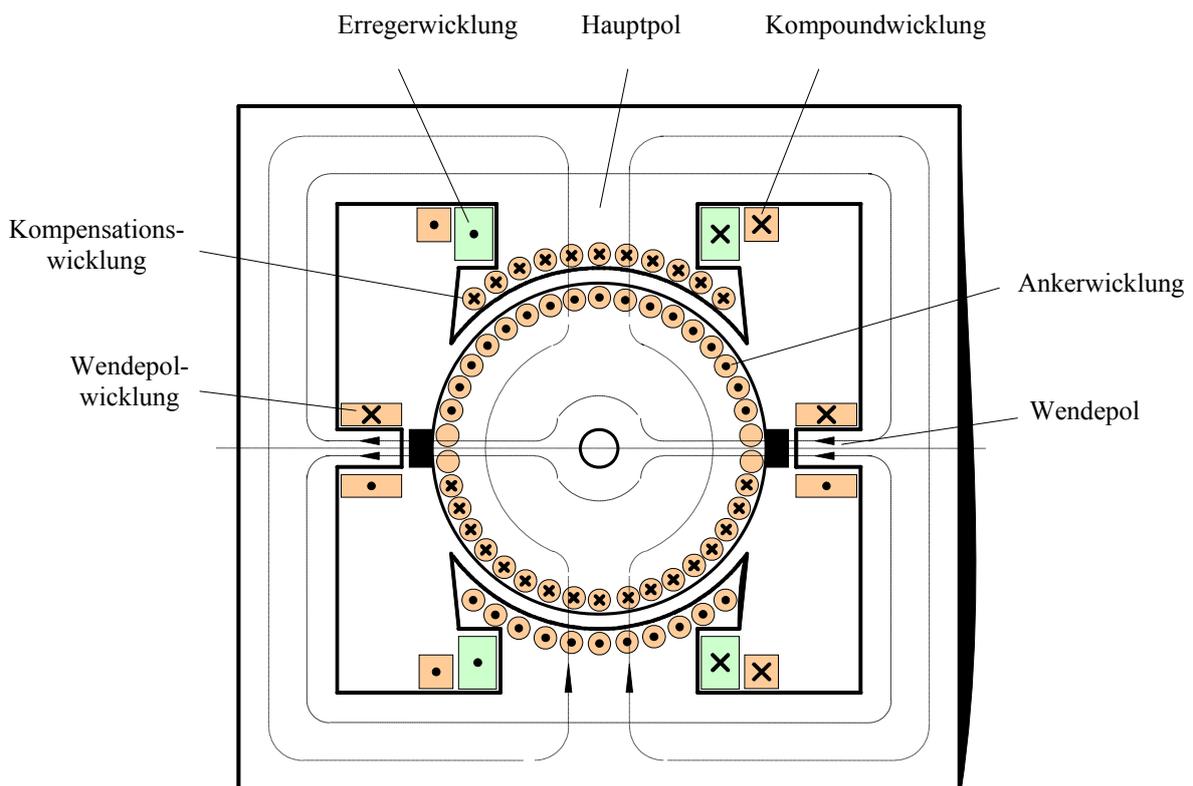
Kurzschluss der zu kommutierenden Leiterschleife durch den Kommutator.

Kurzgeschlossene Leiterschleife friert den Fluss ein:

$$\dot{\psi}_L = u_L = 0 \Rightarrow \psi_L = \text{const.}$$

Daher vor dem Kurzschluss dafür sorgen, dass Leiterschleife frei vom Fluss des Ankerfeldes wird -> Einführung der Wendepolwicklung -> dadurch natürliche Stromkommutierung

Magnetische Durchflutung der Wendepolwicklung muss derjenigen der Ankerstromwicklung entsprechen.



Gleichstrommotor mit Erreger-, Anker-, Wendepol-, Compound- und Kompensationswicklung

### 3.5 Ankerrückwirkung, Kompensations- und Kompoundwicklung

Stichworte:

Ankerfeld verursacht Feldverzerrung in den Erregerpolen. Bei linearem Material wäre dies kein Nachteil. Die einseitige magnetische Sättigung im Erregerpol führt jedoch zur Erhöhung des gesamten magnetischen Widerstands im Erregerkreis und somit zur Schwächung des Erregerflusses.

Gegenmaßnahmen

- Erhöhung der magnetischen Spannung im magnetischen Erregerkreis durch Kompoundwicklung, welche vom Ankerstrom durchflossen wird
- Einführung der Kompensationswicklung zur Kompensation der Ankerrückwirkung, ebenfalls vom Ankerstrom durchflossen.

### 3.6 Mathematische Modellierung

Bezeichnungen:

$T_L$	Drehmoment einer Leiterschleife
$T$	gesamtes Drehmoment des Ankers (Luftspaltdrehmoment)
$N_A$	Zahl der Anker-Leiterschleifen
$N_E$	Gesamtzahl aller Erregerwindungen
$2a$	Zahl der parallelen Ankerstromzweige
$p$	Polpaarzahl
$\alpha$	Polbedeckung, Verhältnis der aktiven Polflächen zur Ankeroberfläche
$\phi_E$	Erregerfluss
$b_E$	Erregerflussdichte
$l$	aktive Länge des Ankers
$d$	Ankerdurchmesser
$\delta$	Luftspalt
$A_{pol}$	Polfläche

Resultierendes auf den Anker wirkendes Drehmoment:

$$T = N_A T_L \alpha = N_A \phi_0 \alpha i_L = N_A b_E d l \alpha i_L$$

Ankerstrom  $i_A$  teilt sich auf  $2a$  Zweige auf:

$$i_L = \frac{1}{2a} i_A$$

$$\phi_E = b_E A_{pol} = \frac{\pi d l \alpha}{2p} b_E$$

Damit:

$$T = \frac{p N_A}{a \pi} \phi_E i_A = c \phi_E i_A = \psi'_E i_A ,$$

wobei

$$c = \frac{p N_A}{a \pi} , \quad \psi'_E = c \phi_E$$

Die induzierte Spannung (*elektromotorische Kraft, EMK*) folgt wieder aus der Leistungsbilanz,

$$u_i = c \phi_E \omega = \psi'_E \omega ,$$

oder alternativ durch Summation der induzierten Spannungen der in Reihe geschalteten Leiterschleifen.

Spannungsgleichung des Ankerkreises unter Berücksichtigung des Ankerwiderstands  $R_A$ , der Ankerinduktivität  $L_A$  und des Bürstenspannungsabfalls  $u_B$ :

$$u_A = u_i + L_A \dot{i}_A + R_A i_A + 2u_B$$

Mit guter Genauigkeit kann der Bürstenspannungsabfall  $u_B$  also eine konstante, vom Ankerstrom unabhängige Spannung von etwa 1 V angesetzt werden.

Erregerstromkreis:

$$u_E = L_E \dot{i}_E + R_E i_E$$

Beachte: Im Allgemeinen sind zwischen zwei Wicklungen Gegeninduktivitäten zu berücksichtigen. Die Flüsse von Erreger- und Ankerwicklung sind aber durch die zueinander senkrechte Anordnung nicht miteinander verkettet, so dass die Gegeninduktivität zwischen diesen Wicklungen Null ist.

Magnetischer Kreis der Erregung:

Magnetische Leitfähigkeit des Erregerkreises

$$\Lambda_E = \frac{1}{R_{magE}} = \frac{\mu_0 A_{pol}}{2\delta} = \frac{\mu_0 \alpha \pi d l}{2\delta \cdot 2p} = \frac{\mu_0 \alpha \pi d l}{4p\delta}$$

Induktivität:

$$L_E = \Lambda_E \frac{N_E^2}{p^2} p = \Lambda_E \frac{N_E^2}{p}$$

Erregerfluss:

$$\phi_E = \Lambda_E \frac{N_E}{p} i_E = \frac{L_E}{N_E} i_E = \frac{\mu_0 \alpha \pi d l N_E}{4p^2 \delta} i_E$$

$$\psi'_E = c\phi_E = \frac{cL_E}{N_E} i_E = L'_E i_E, \quad L'_E = \frac{cL_E}{N_E} = \frac{\mu_0 \alpha d l N_E N_A}{4a p \delta}$$

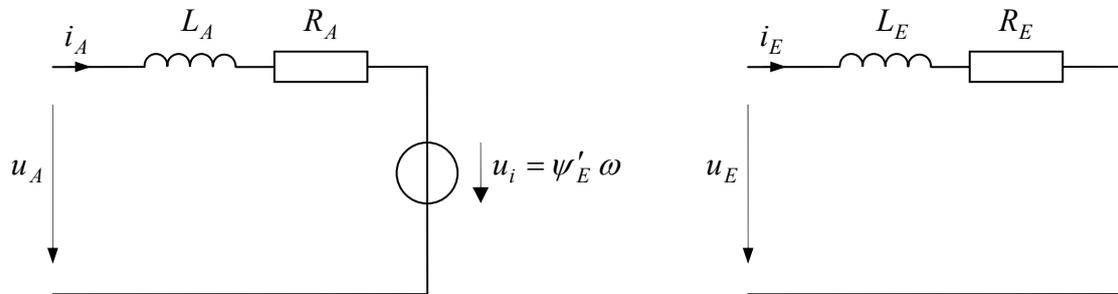
Zusammenfassung der wichtigsten Gleichungen:

$$T = \psi'_E i_A$$

$$\psi'_E = L'_E i_E$$

$$u_A = \psi'_E \omega + L_A \dot{i}_A + R_A i_A + 2u_B$$

$$u_E = L_E \dot{i}_E + R_E i_E$$



Ersatzschaltbilder des Anker- und des Erregerkreises

### Dynamisches Verhalten

Das dynamische Verhalten des Anker- bzw. Erregerstroms entspricht dem einer  $RL$ -Gliedes. Die maßgeblichen Anker- und Erregerzeitkonstanten sind

$$\tau_A = \frac{L_A}{R_A} \quad \text{und} \quad \tau_E = \frac{L_E}{R_E}$$

### 3.7 Elektrische und mechanische Leistung, Wirkungsgrad

Elektrische Leistung (Verbraucherzählpeilsystem):

$$P_{el} = P_{elA} + P_{elE} = u_A i_A + u_E i_E$$

Mechanische Leistung (Erzeugerzählpeilsystem):

$$P_{mech} = \omega T$$

Energiebilanz:

$$P_{el} = \dot{w}_A + \dot{w}_E + P_V + P_{mech}$$

Verlustleistung:

$$P_V = P_{VA} + P_{VE} = R_E i_E^2 + R_A i_A^2$$

Innere Energien:

$$w_A = \frac{1}{2} L_A i_A^2, \quad w_E = \frac{1}{2} L_E i_E^2$$

*Wirkungsgrad* des Ankerkreises (Vernachlässigung der Erregerverluste) im stationären Zustand für den motorischen Betrieb:

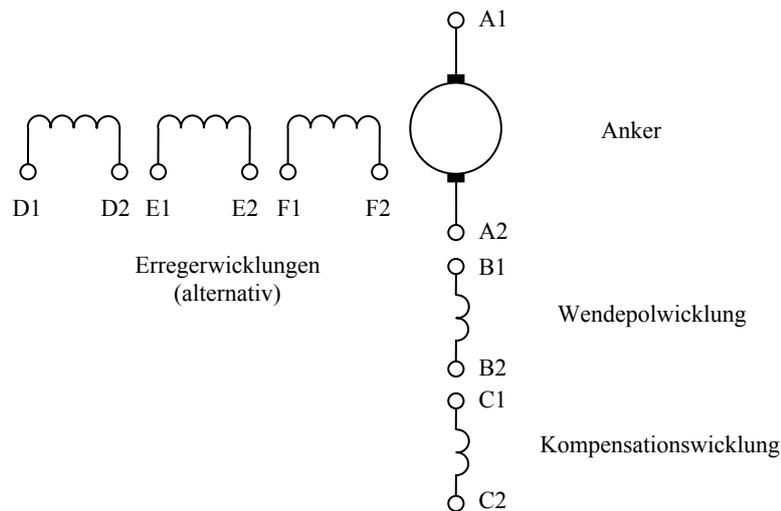
$$\eta = \frac{P_{mech}}{P_{elA}} = \frac{\omega T}{U_A I_A} = \frac{\omega T}{(R_A I_A + \psi'_E \omega) I_A} = \frac{\omega T}{\left( R_A \frac{T}{\psi'_E} + \psi'_E \omega \right) \frac{T}{\psi'_E}} = \frac{\omega}{\omega + \frac{R_A}{\psi'^2_E} T} = \frac{1}{1 + \frac{R_A}{\psi'^2_E} \frac{T}{\omega}}$$

### 3.8 Schaltungsarten, Klemmenbezeichnungen und Schaltzeichen

Man unterscheidet verschiedene Schaltungsarten:

- *Fremderregung*: Erreger- und Ankerkreis werden aus verschiedenen elektrischen Quellen gespeist
- *Nebenschluss*: Erreger- und Ankerkreis sind parallel geschaltet
- *Reihenschluss*: Erreger- und Ankerkreis sind in Reihe geschaltet

Wicklung	Klemmen
Ankerwicklung	A1, A2
Wendepolwicklung	B1, B2
Kompensationswicklung	C1, C2
Erregerwicklung für Reihenschlusschaltung	D1, D2
Erregerwicklung für Nebenschlusschaltung	E1, E2
Erregerwicklung für Fremderregung	F1, F2



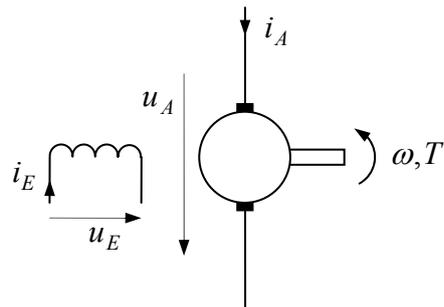
### 3.9 Fremderregter und permanent erregter Motor

Beim fremderregten Betrieb werden Erreger- und Ankerwicklung unabhängig voneinander gespeist. Typischerweise werden der Erregerstrom und damit der Erregerfluss konstant gehalten,

$$i_E = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \phi_E = \text{const.} \text{ bzw. } \psi'_E = \text{const.},$$

Dies gelingt durch Aufschaltung einer konstanten Erregerspannung  $u_E$  allerdings nur unvollkommen, da sich der Strom aufgrund des temperaturabhängigen Widerstands  $R_E$  verändern kann. Ggf. wird eine Erregerstromregelung vorgesehen.

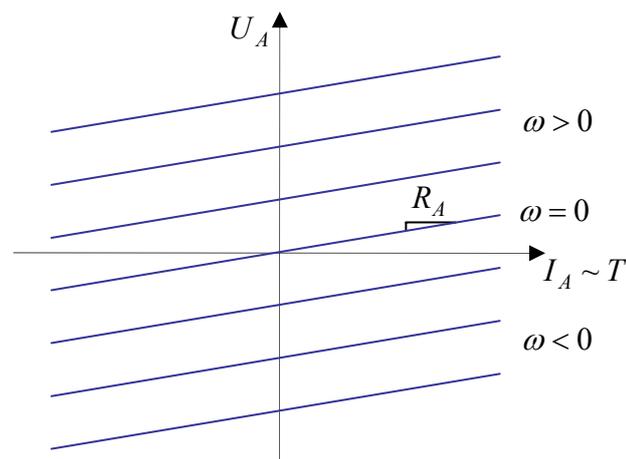
Beim permanent erregten Motor wird der Erregerfluss von einem Permanentmagneten erzeugt. Sein Verhalten gleicht dem des fremderregten Motors mit konstantem Erregerstrom.



Fremderregter Gleichstrommotor

### Stationäres Strom-Spannungs-Verhalten bei konstanter Drehzahl

$$U_A = \psi'_E \omega + R_A I_A$$



Stationäre Kennlinien von Ankerstrom und -spannung

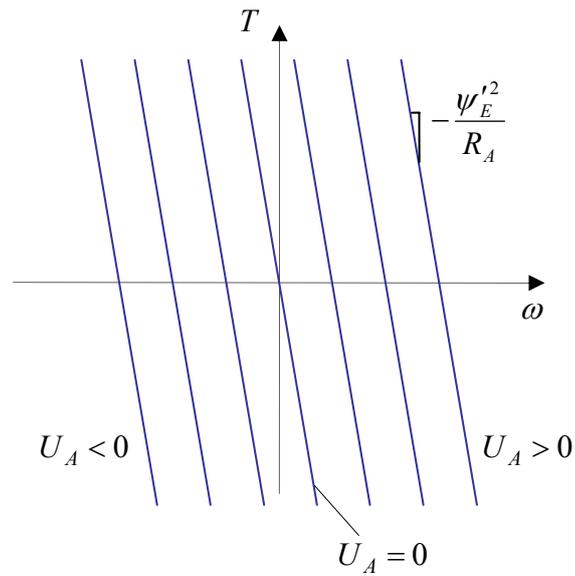
### Stationäres Drehmoment-Drehzahl-Verhalten bei konstanter Spannung

Einsetzen der Drehmomentbeziehung in die Spannungsgleichung:

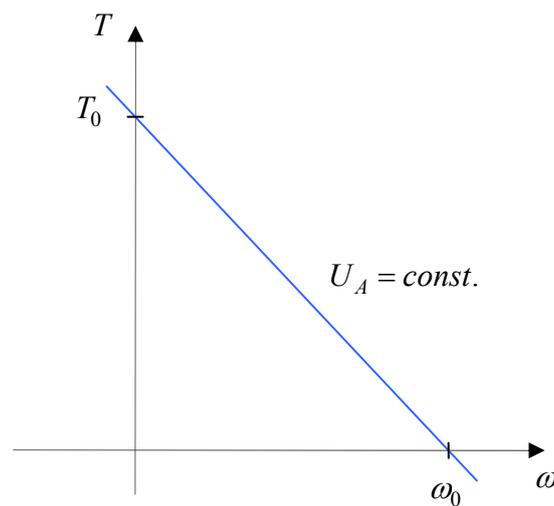
$$U_A = \frac{R_A}{\psi'_E} T + \omega \psi'_E$$

Auflösen nach  $\omega$  ergibt das stationäre Drehmoment-Drehzahlverhalten für konstante Ankerspannung:

$$\omega = \frac{U_A}{\psi'_E} - \frac{R_A T}{\psi_E'^2}$$



Stationäre Kennlinien von Drehmoment und Drehzahl bei konstanter Ankerspannung



Losbrech-Drehmoment und Leerlaufdrehzahl bei konstanter Ankerspannung

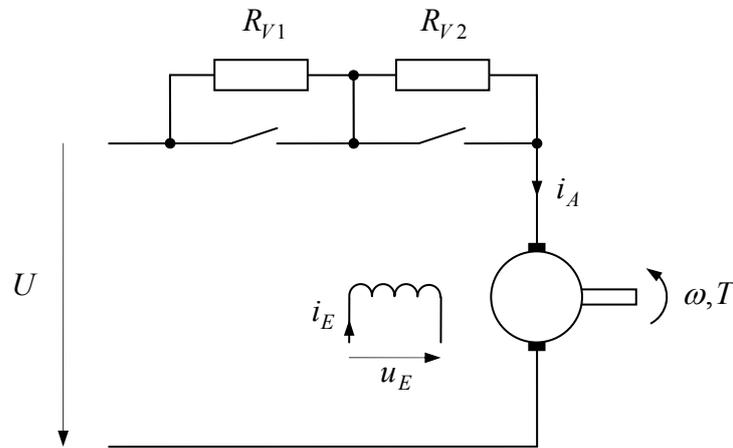
Losbrech-Drehmoment und -Ankerstrom (bei  $\omega = 0$ ):

$$I_{A0} = \frac{U_A}{R_A}, \quad T_0 = \frac{U_A \psi'_E}{R_A}$$

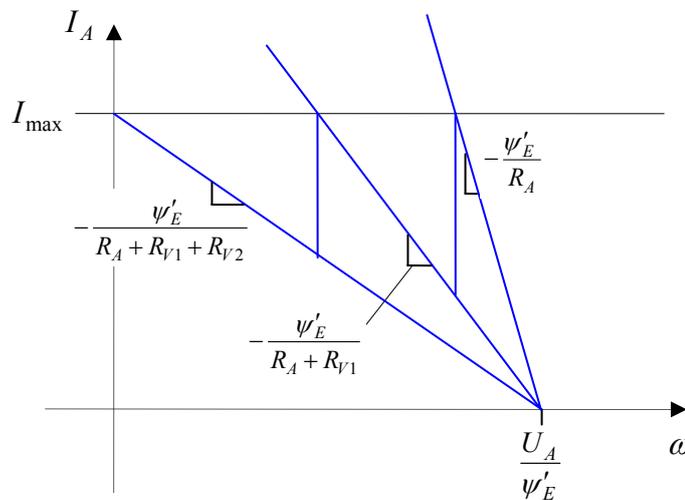
Leerlaufdrehzahl ( $T = 0$  bzw.  $I_A = 0$ )

$$\omega_0 = \frac{U_A}{\psi'_E}$$

Wird der Gleichstrommotor mit konstanter Ankerspannung betrieben, entsteht beim Einschalten aus dem Stillstand heraus ein sehr großer Anlaufstrom, der ggf. den zulässigen Maximalwert überschreitet. Bei kleinen Motoren mit geringer Trägheit, die schnell beschleunigen, kann ein derartiger kurzzeitiger Überstrom ggf. hingenommen werden. Andernfalls muss der Anlaufstrom begrenzt werden. Die klassische Vorgehensweise arbeitet mit Anlaufwiderständen vorgenommen, die mit steigender Drehzahl dann überbrückt werden.

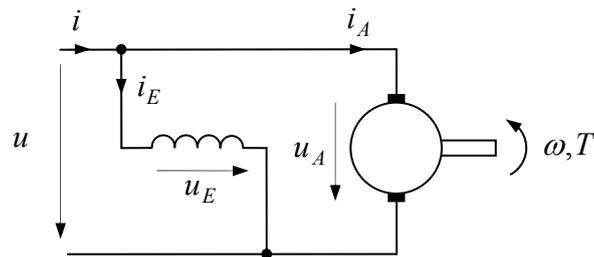


Betrieb mit Vorwiderstand



Anfahren mit Vorwiderständen

### 3.10 Nebenschlussmotor



Nebenschlusschaltung

$$u_A = R_A i_A + \psi'_E \omega + L_A \dot{i}_A = R_A i_A + L'_E i_E \omega + L_A \dot{i}_A$$

$$u_E = R_E i_E + L_E \dot{i}_E$$

$$T = \psi'_E i_A = L'_E i_E i_A$$

Nebenschluss:

$$u = u_A = u_E, \quad i = i_A + i_E$$

Stationäres Verhalten:

$$I_E = \frac{U}{R_E}$$

$$I_A = \frac{U - L'_E I_E \omega}{R_A} = \frac{U - L'_E U / R_E \omega}{R_A} = \frac{1 - L'_E / R_E \omega}{R_A} U$$

$$I = I_E + I_A = \left[ \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_E} - \frac{L'_E \omega}{R_A R_E} \right] U$$

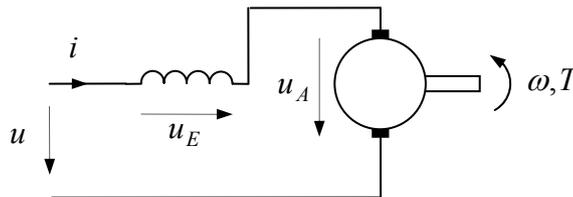
$$T = L'_E I_E I_A = \frac{1 - L'_E / R_E \omega}{R_A R_E} U^2$$

### 3.11 Reihenschlussmotor

$$u_A = R_A i_A + \psi'_E \omega + L_A \dot{i}_A = R_A i_A + L'_E i_E \omega + L_A \dot{i}_A$$

$$u_E = R_E i_E + L_E \dot{i}_E$$

$$T = \psi'_E i_A = L'_E i_E i_A$$



Reihenschlusschaltung

Reihenschluss:

$$u = u_A + u_E \quad , \quad i = i_A = i_E$$

$$R = R_A + R_E \quad , \quad L = L_A + L_E$$

$$u = R i + L'_E i \omega + L \dot{i}$$

$$u = (R + L'_E \omega) i + L \dot{i}$$

$$u = R'(\omega) i + L \dot{i}$$

Drehzahlabhängiger effektiver Widerstand:

$$R'(\omega) = R + L'_E \omega$$

$$T = \psi'_E i = L'_E i^2$$

Quadratische Abhängigkeit des Drehmoments vom Strom, Änderung des Vorzeichens ist nur durch Wechsel der Verschaltung von Erreger- und Ankerwicklung möglich,  $i = i_A = -i_E$ .

Daher kann ein Reihenschlussmotor auch mit Wechselspannung gespeist werden. Sinusförmige Speisung mit der Frequenz  $\omega_{el}$ , Schreibweise mit komplexen Effektivwertzeigern:

$$\underline{U} = R'(\omega) \underline{I} + j \omega_{el} L \underline{I}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R'(\omega) + j\omega_{el}L}$$

Das Drehmoment pulsiert mit  $2\omega_{el}$ . Drehmomentmittelwert:

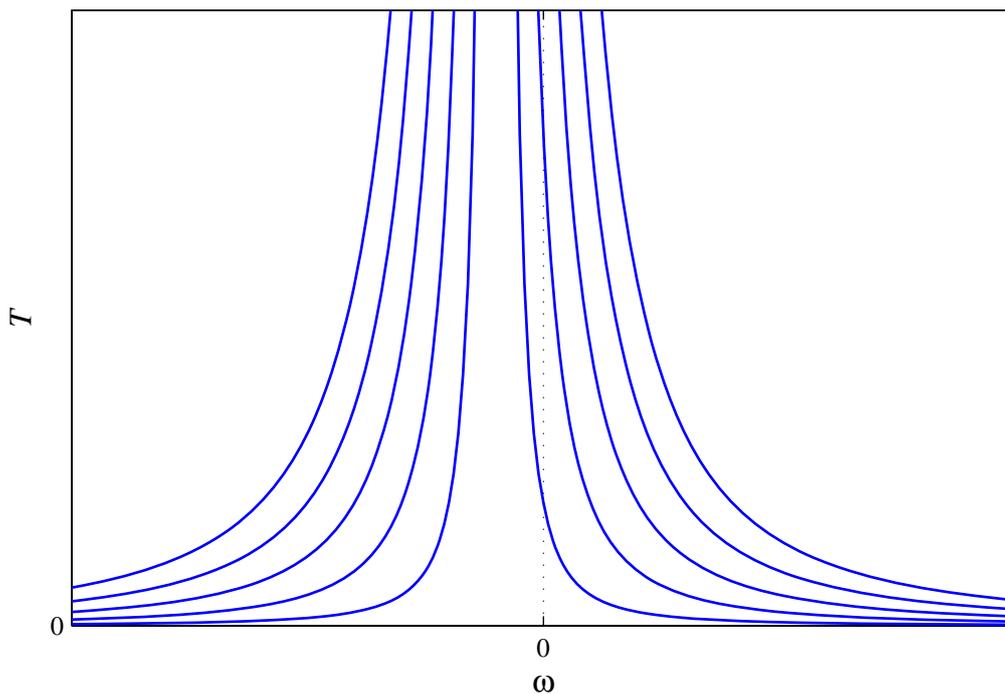
$$\bar{T} = L'_E \overline{i^2} = L'_E I^2 = \frac{L'_E U^2}{R'^2(\omega) + \omega_{el}^2 L^2}$$

Drehmoment-Drehzahl-Charakteristik:

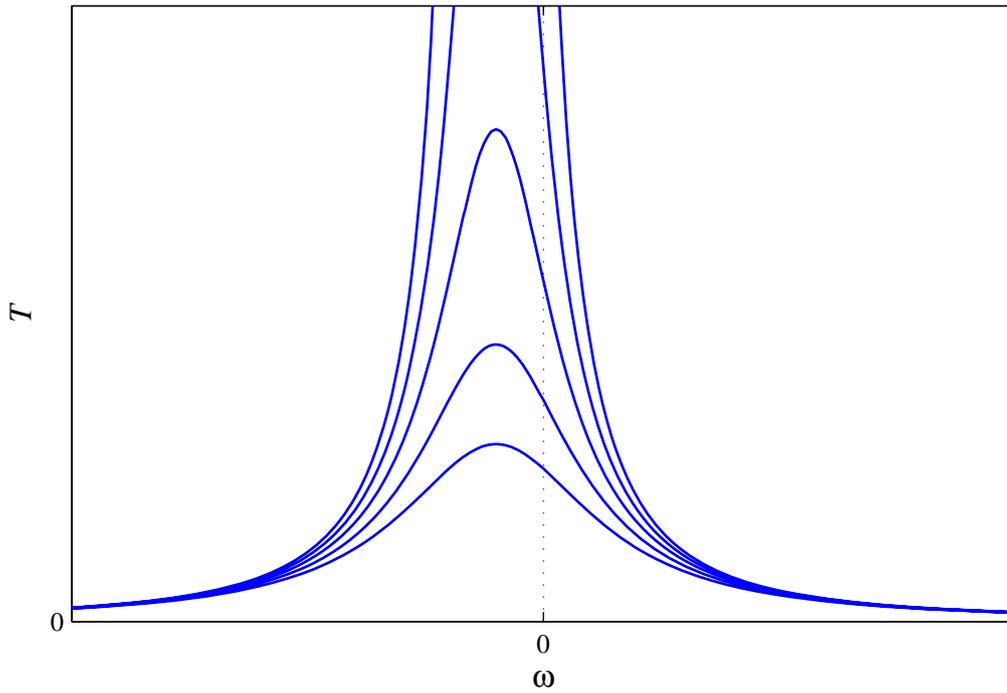
$$\left( R'^2(\omega) + \omega_{el}^2 L^2 \right) \bar{T} = L'_E U^2$$

$$\left( (R + L'_E \omega)^2 + \omega_{el}^2 L^2 \right) \bar{T} = L'_E U^2$$

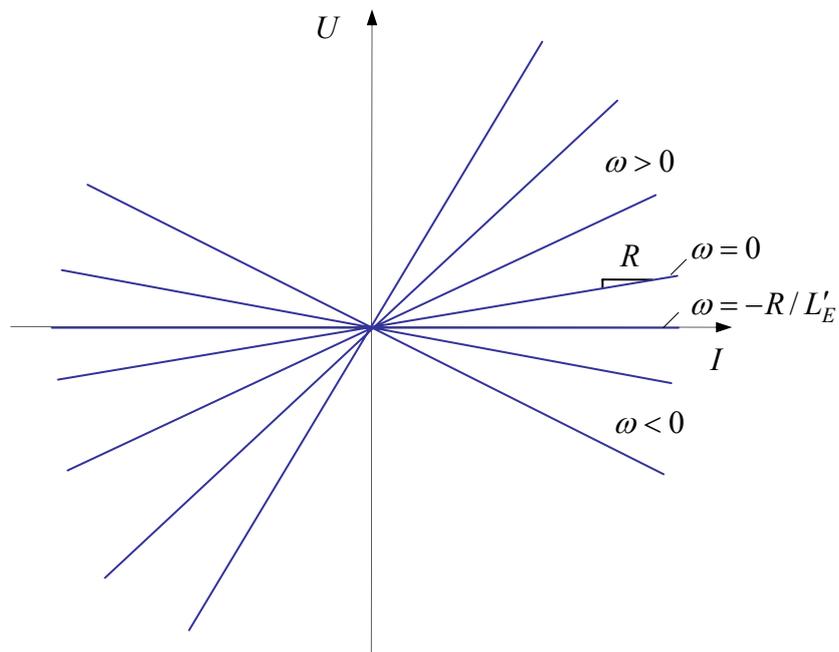
Wird der Reihenschlussmotor mit konstanter Spannung betrieben und dabei mechanisch entlastet,  $T \rightarrow 0$ , wächst die Drehzahl über alle Grenzen,  $\omega \rightarrow \infty$  (s. Bild).



Drehmoment-Drehzahl-Kennlinien des Reihenschlussmotors für verschiedene Spannungen  $U$  bei Gleichspannungsspeisung



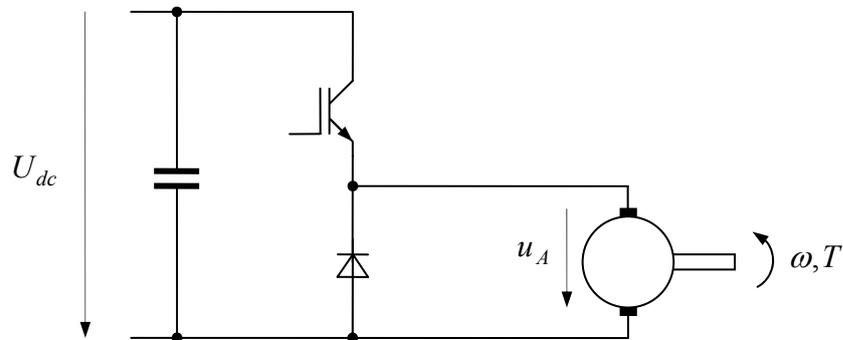
Drehmoment-Drehzahl-Kennlinien des Reihenschlussmotors für GS-Speisung und verschiedene Frequenzen bei WS-Speisung, die Höhe der Spannungen  $U$  ist für alle Kurven konstant



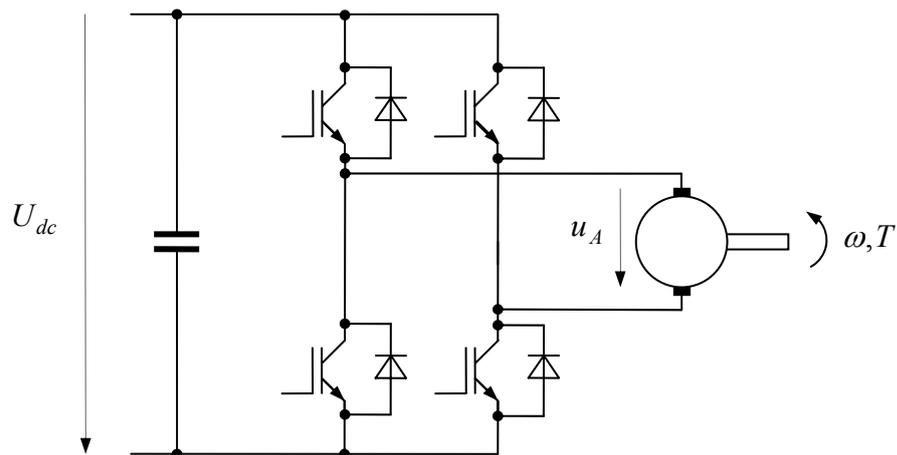
Strom-Spannungs-Kennlinien des Reihenschlussmotors für verschiedene Drehzahlen

### 3.12 Geregelter Betrieb

Um gezielt einen bestimmten Betriebspunkt einzustellen, bedarf es veränderbarer Speisespannungen. Im Fall von Wechsel- oder Drehspannung kann eine steuerbare Thyristorbrücke zum Einsatz kommen. Steht eine Gleichspannung als Energieversorgung zur Verfügung, werden Gleichstromsteller eingesetzt. Die Art des Gleichstromstellers hängt von der gewünschten Betriebsart des Motors ab. Soll der Motor nur in einer Richtung motorisch betrieben werden, reicht ein einfacher Tiefsetzsteller aus. Sind beide Drehrichtungen und beide Drehmomentrichtungen (motorischer und generatorischer Betrieb) zu beherrschen, muss für die Ankerspeisung ein 4-Quadranten-Steller verwendet werden. Für den Erregerkreis ist jeweils ein einfacher Tiefsetzsteller ausreichend. Die Speisung mit linear arbeitenden Endstufen kommt wegen der hohen Verluste allenfalls nur für sehr kleine Leistungen in Betracht.

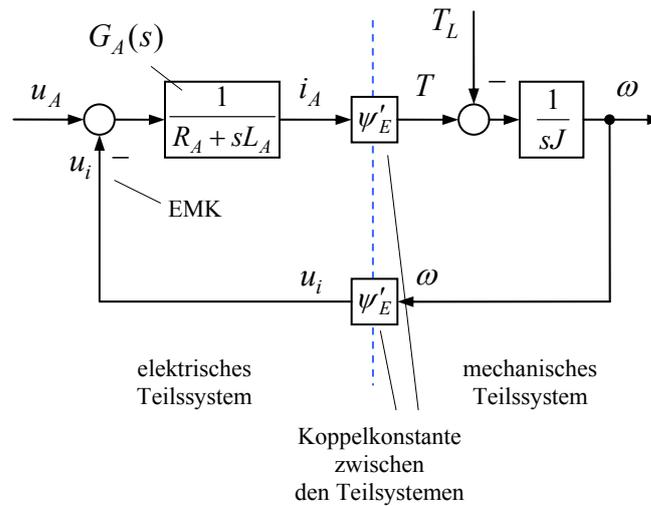


Speisung des Ankerkreises durch einen Tiefsetzsteller



Speisung des Ankerkreises durch einen 4-Quadranten-Steller

## Dynamisches Verhalten des unregulierten Motors mit konstanter Erregung



Wirkungsplan des Gleichstrommotors mit konstanter Erregung  
(fremd- oder permanenterregt)

Übertragungsfunktion des Ankerkreises:

$$sL_A i_A(s) = u_A(s) - R_A i_A(s) - u_i(s)$$

$$i_A(s) = G_A(s)(u_A(s) - u_i(s))$$

mit der Übertragungsfunktion des Ankerkreises

$$G_A(s) = \frac{1}{sL_A + R_A} = \frac{1}{R_A} \frac{1}{s\tau_A + 1}$$

und der *Ankerzeitkonstante*

$$\tau_A = \frac{L_A}{R_A} .$$

Drehzahl-Spannungs-Verhalten:

$$\begin{aligned}
\frac{\omega(s)}{u_A(s)} &= \frac{\psi'_E \frac{1}{sL_A + R_A} \frac{1}{sJ}}{1 + \psi'^2_E \frac{1}{sL_A + R_A} \frac{1}{sJ}} \\
&= \frac{\psi'_E}{sJ(sL_A + R_A) + \psi'^2_E} \\
&= \frac{1}{\psi'_E} \frac{1}{s^2 \frac{JL_A}{\psi'^2_E} + s \frac{JR_A}{\psi'^2_E} + 1} \\
&= \frac{1}{\psi'_E} \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2d \frac{s}{\omega_0} + 1}
\end{aligned}$$

mit

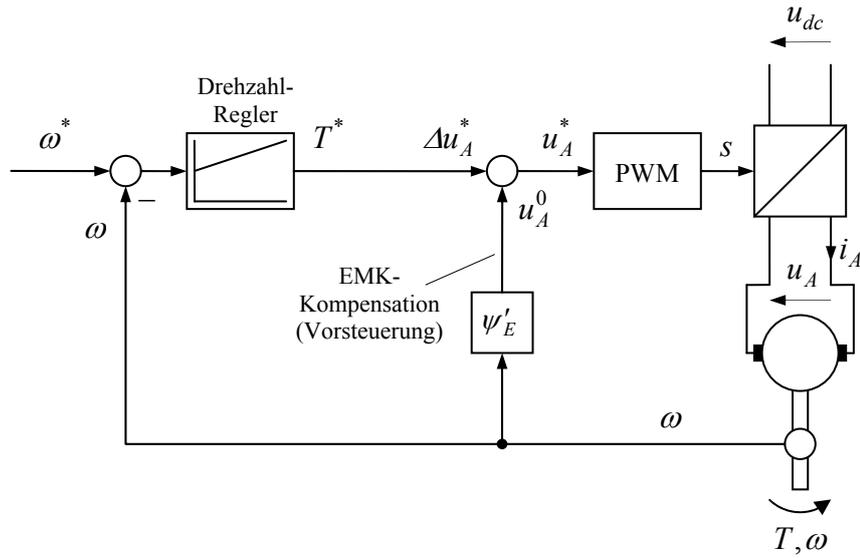
$$\omega_0 = \frac{\psi'_E}{\sqrt{JL_A}}$$

$$\begin{aligned}
d &= \frac{JR_A \omega_0}{2\psi'^2_E} = \frac{R_A}{2\psi'_E} \sqrt{\frac{J}{L_A}} \\
&= \frac{1}{2\omega_0 \tau_A}
\end{aligned}$$

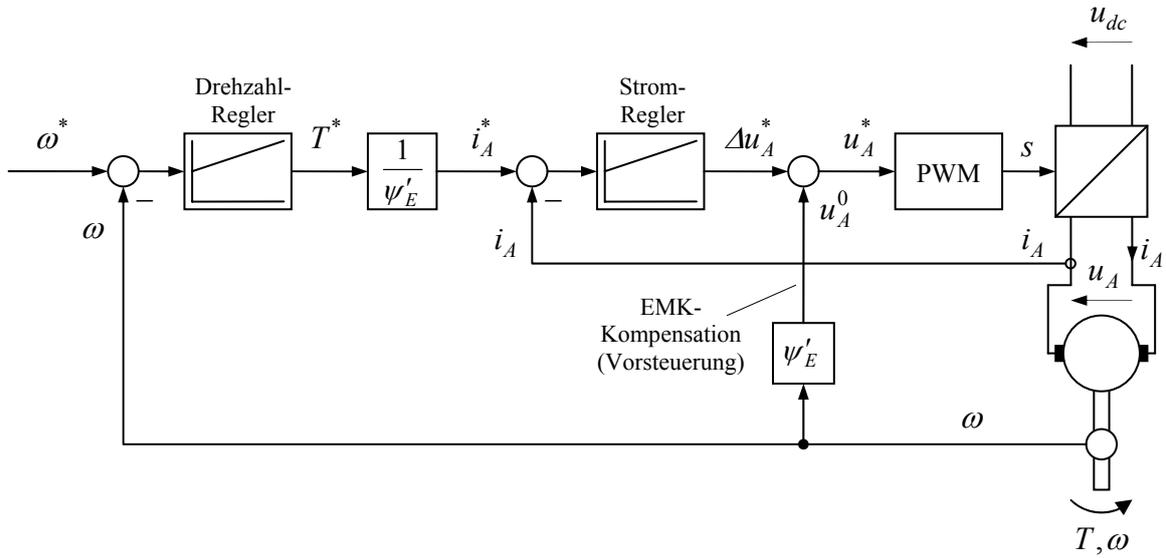
Ist das System schwach gedämpft, also  $d < 1$ , treten Schwingungen in Ausgleichsvorgängen auf.

Die Regelung wird häufig kaskadiert aufgebaut: Da Ankerstrom und Drehmoment bei konstanter Erregung zueinander proportional sind, wird eine innere Drehmomentregelung als Stromregelung realisiert. Das hat den zusätzlichen Vorteil, dass eine Begrenzung des Ankerstroms auf den zulässigen Maximalwert sehr einfach durch eine Begrenzung des Sollwerts bewerkstelligt werden kann. Der Stromregler muss dann allerdings zuverlässig arbeiten, so dass der Istwert den Sollwert tatsächlich nicht überschreitet. Die Drehzahlregelung wird dann als äußerer Regelkreis aufgebaut.

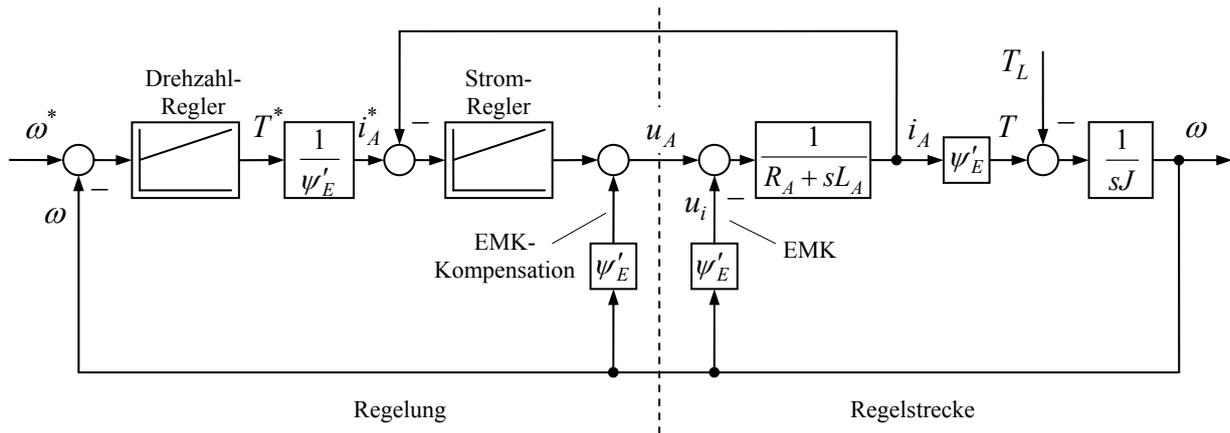
Bei einfachen Regelungen kann ggf. auf die unterlagerte Stromregelung verzichtet werden. Die Drehzahlregelung wird dann unmittelbar auf die Ankerspannung. Hierbei ist man auf genügende Dämpfung der Regelstrecke selbst angewiesen, also insbesondere auf einen größeren Ankerinnenwiderstand, welcher dämpfend auf regelungstechnische Ausgleichsvorgänge wirkt. Größere Maschinen, bei denen der Ankerwiderstand klein ist, können auf diese Weise nur schlecht geregelt werden. Außerdem entfällt bei dieser Regelungsstruktur die Möglichkeit, den Ankerstrom bezüglich seines zulässigen Maximalwerts zu überwachen.



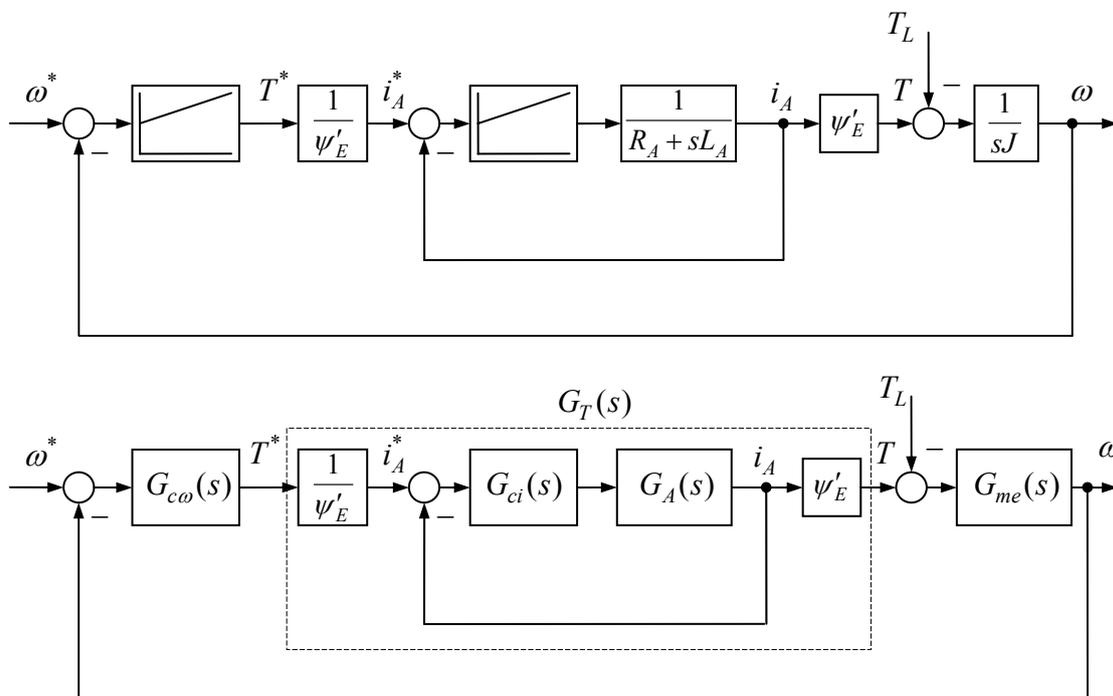
Drehzahlregelung ohne unterlagerte Ankerstromregelung



Drehzahlregelung mit unterlagerner Ankerstromregelung



Regelungstechnische Modellbildung des gesamten Systems



Vereinfachte regelungstechnische Modellbildung

Differenzialgleichung für den Ankerstrom und Drehzahl:

$$L_A \dot{i}_A = u_A - R_A i_A - u_i = u_A - R_A i_A - \omega \psi'_E$$

$$J \dot{\omega} = T - T_L$$

Laplace-Transformierte:

$$sL_A i_A = u_A(s) - R_A i_A(s) - u_i(s)$$

$$sJ\omega(s) = T(s) - T_L(s)$$

Übertragungsfunktionen:

Übertragungsfunktion des elektrischen Teilsystems (Ankeradmittanz):

$$G_A(s) = Y_A(s) = \frac{i_A(s)}{u_A(s) - u_i(s)} = \frac{1}{R_A + sL_A}$$

Drehmoment-Führungsübertragungsfunktion

$$G_T(s) = \frac{T(s)}{T^*(s)} = \frac{G_{ci}(s)G_A(s)}{1 + G_{ci}(s)G_A(s)}$$

Übertragungsfunktion des mechanischen Teilsystems:

$$G_{me}(s) = \frac{\omega_A(s)}{T(s) - T_L(s)} = \frac{1}{sJ}$$

Drehzahl-Führungsübertragungsfunktion

$$G_\omega(s) = \frac{G_{c\omega}(s)G_T(s)G_{me}(s)}{1 + G_{c\omega}(s)G_T(s)G_{me}(s)}$$

Störübertragungsfunktion

$$G_{T_L}(s) = \frac{G_{me}(s)}{1 + G_{c\omega}(s)G_T(s)G_{me}(s)}$$

### 3.13 Betrieb an Strom- und Spannungsgrenzen

Die stationären Gleichungen für den fremderregten Motor lauten

$$u_A = R_A i_A(s) + \omega \psi'_E$$

$$T = \psi'_E i_A$$

Das Drehmoment ist (bei konstantem Erregerfluss) durch die Stromgrenze des Motors oder des speisenden Umrichters

$$|i_A| \leq I_{\max}$$

begrenzt. Auch die vom speisenden Umrichter gelieferte Spannung ist begrenzt:

$$|u_A| \leq U_{\max}.$$

Wird der Erregerfluss konstant gehalten, erreicht die Drehzahl bei

$$\omega_0 = \frac{U_{\max} - R_A i_A}{\psi'_E}$$

die Spannungsgrenze und kann darüber hinaus nicht weiter gesteigert werden. Höhere Drehzahlen sind jedoch möglich, wenn der Erregerfluss verringert (geschwächt) wird. Der Fluss muss umkehrt proportional zur Drehzahl reduziert werden.

$$\psi'_E = \frac{U_{\max} - R_A I_{\max}}{\omega} \approx \frac{U_{\max}}{\omega}$$

Dazu bedarf es natürlich einer steuerbaren Erregerspeisung. Das verfügbare Drehmoment reduziert sich umkehrt proportional zur Drehzahl,

$$T_{\max} = \frac{U_{\max} - R_A I_{\max}}{\omega} I_{\max} \approx \frac{U_{\max} I_{\max}}{\omega}.$$

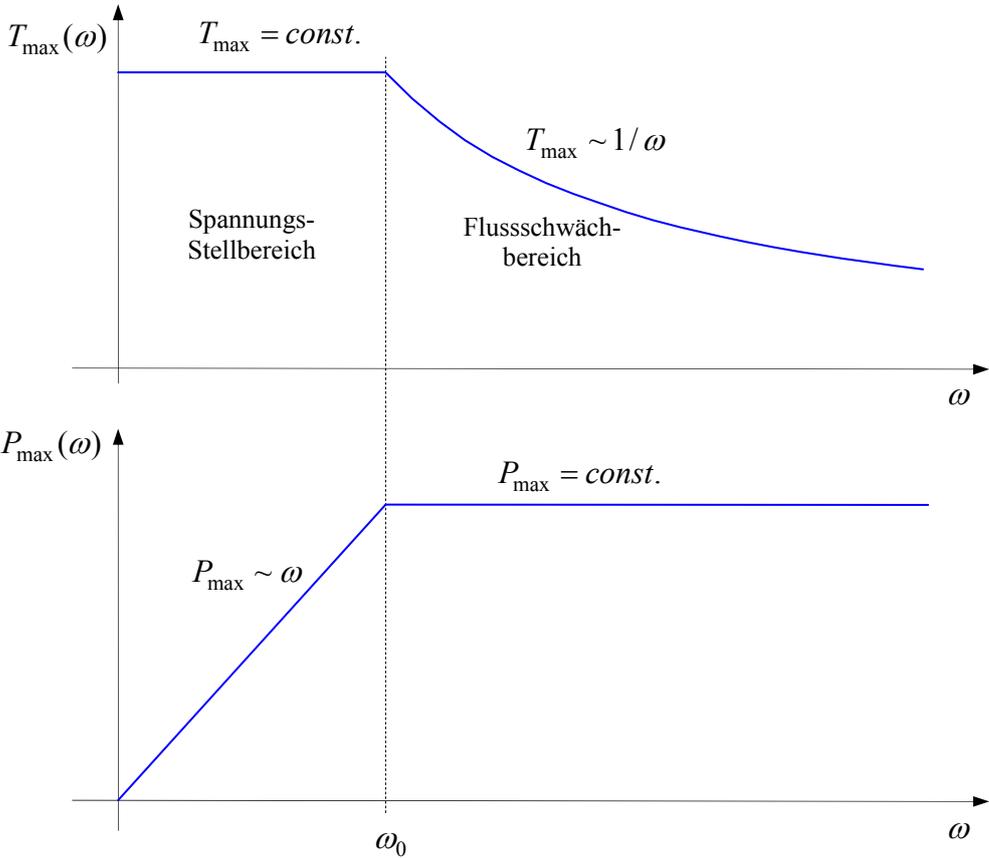
Die verfügbare mechanische Leistung

$$P_{\max} = \omega T_{\max} = (U_{\max} - R_A I_{\max}) I_{\max} \approx U_{\max} I_{\max}$$

konstant. Dieser Bereich wird *Flussschwächbereich* bzw. *Konstant-Leistungsbereich* genannt. Im unteren Drehzahlbereich  $|\omega| < \omega_0$ , wo die Ankerspannung nicht ihre Grenze erreicht, ist die verfügbare Leistung dagegen proportional zur Drehzahl

$$P_{\max} = \omega T_{\max} = \omega \psi'_E I_{\max}$$

Dieser Bereich heißt *Anker- oder Spannungs-Stellbereich* bzw. *Konstant-Drehmoment-Bereich*. Der Flussschwächbereich wird häufig als dimensionsloses Verhältnis der Frequenz  $\omega_0$  zur maximalen Frequenz  $\omega_{\max}$ , welche in der Regel aus mechanischen Grenzen resultiert, angegeben.



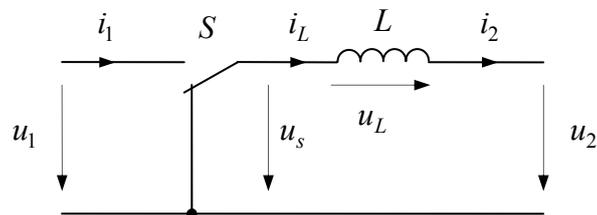
Verläufe von verfügbarem Drehmoment und verfügbarer Leistung über der Drehzahl

## 4 Gleichstromsteller

Gleichstromsteller werden für verschiedene Anwendungen und Leistungsklassen mit Spannungen von wenigen Volt bis zu einigen 100 V oder sogar kV und Leistungen von einem Watt und darunter bis zu einigen 100 kW oder darüber eingesetzt.

### 4.1 Tiefsetzsteller

#### 4.1.1 Funktionsprinzip



Prinzipbild des Tiefsetzstellers

Annahme konstanter Spannungen:

$$u_1(t) = U_1 \quad , \quad u_2(t) = U_2 \quad .$$

Der Schalter  $S$  wird mit dem *Tastverhältnis*

$$D = \frac{T_e}{T_s}$$

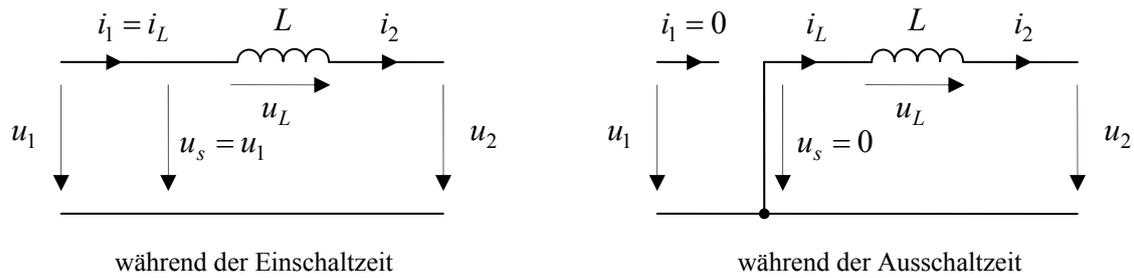
getaktet (s. Bild).

Begriffe:

$T_e$	<i>Einschaltzeit</i> (Schalter oben)
$T_a$	<i>Ausschaltzeit</i> (Schalter unten)
$T_s = T_e + T_a$	<i>Schaltperiode</i>
$f_s = \frac{1}{T_s}$	<i>Schaltfrequenz</i>

Stellerspannung:

$$u_s(t) = \begin{cases} u_1(t) = U_1 & \text{während der Einschaltzeit} \\ 0 & \text{während der Ausschaltzeit} \end{cases}$$



Ersatzschaltbilder während Ein- und Ausschaltzeit

### Analyse des stationären Verhaltens

Zeitlicher Verlauf des Stroms  $i_L(t)$  (vgl. Bild): Aus

$$L \dot{i}_L(t) = u_L(t) = u_s(t) - U_2$$

folgt während der Einschaltzeit  $t \in [0, T_e]$ :

$$i_L(t) = i_L(0) + \frac{U_1 - U_2}{L} t$$

und während der Ausschaltzeit  $t \in [T_e, T_s]$ :

$$i_L(t) = i_L(T_e) - \frac{U_2}{L} (t - T_e) = i_L(0) + \frac{U_1 - U_2}{L} T_e - \frac{U_2}{L} (t - T_e)$$

Der Drosselstrom  $i_L(t)$  ist genau dann stationär (bzw. periodisch), wenn

$$i_L(T_s) = i_L(0) .$$

Daraus folgt:

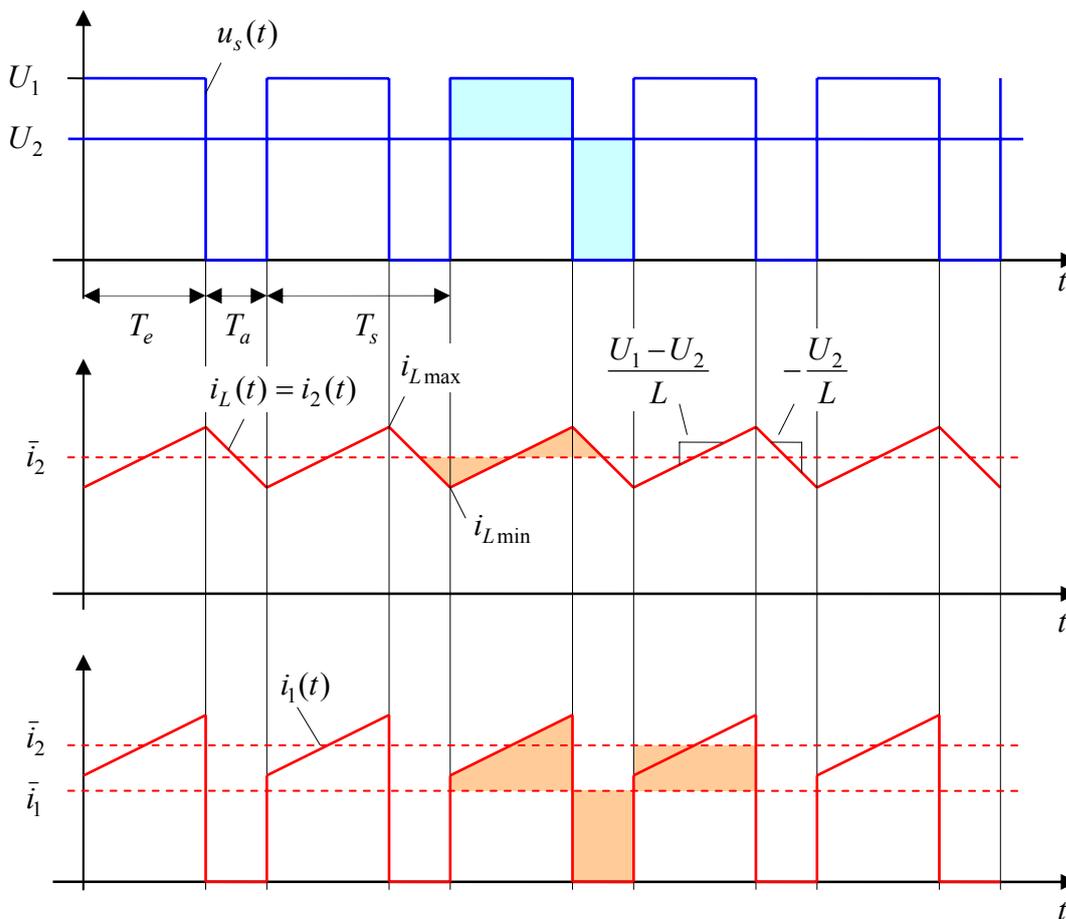
$$i_L(0) + \frac{U_1 - U_2}{L} T_e - \frac{U_2}{L} (T_s - T_e) = i_L(0)$$

$$(U_1 - U_2) T_e - U_2 (T_s - T_e) = 0$$

$$U_1 T_e - U_2 T_s = 0$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{T_e}{T_s} = D$$

Das Tastverhältnis bestimmt ähnlich wie das Übersetzungsverhältnis beim Transformator das Verhältnis der Spannungen!



Zeitliche Verläufe beim Tiefsetzsteller im stationären Zustand

Andere alternative Betrachtung mit *Mittelwerten*: Der Strom  $i_L(t)$  ändert sich über eine Periode  $T_s$  nicht, wenn die Drosselspannung  $u_L(t)$  im *Mittel Null* ist,  $\bar{u}_L = 0$ , denn aus

$$L \dot{i}_L(t) = u_L(t)$$

folgt durch Integration über eine Schaltperiode  $T_s$ :

$$L(i_L(T_s) - i_L(0)) = \int_0^{T_s} u_L(t) dt = T_s \bar{u}_L = 0 \quad .$$

Maschengleichung:

$$u_s(t) = u_L(t) + U_2$$

Mittelwerte im stationären Zustand:

$$\bar{u}_s = \bar{u}_L + U_2 = U_2$$

Der Mittelwert der Stellerspannung ist aber

$$\bar{u}_s = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} u_s(t) dt = \frac{T_e U_1}{T_s} = D U_1$$

Daher folgt

$$\bar{u}_s = U_2 = D U_1$$

bzw.

$$\frac{U_2}{U_1} = D$$

Für den Mittelwert des Stroms  $i_1(t)$  ergibt sich:

$$\bar{i}_1 = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} i_1(t) dt = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} i_L(t) dt = \frac{T_e}{T_s} \bar{i}_L = \frac{T_e}{T_s} \bar{i}_2$$

$$\bar{i}_1 = D \bar{i}_2$$

Also

$$D = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\bar{i}_1}{\bar{i}_2}$$

Der Strom des Tiefsetzstellers ist also niemals konstant, sondern schwankt stets nach einem dreieckförmigen Verlauf hin und her. Für die Schwankungsbreite des Stroms  $i_L$  folgt

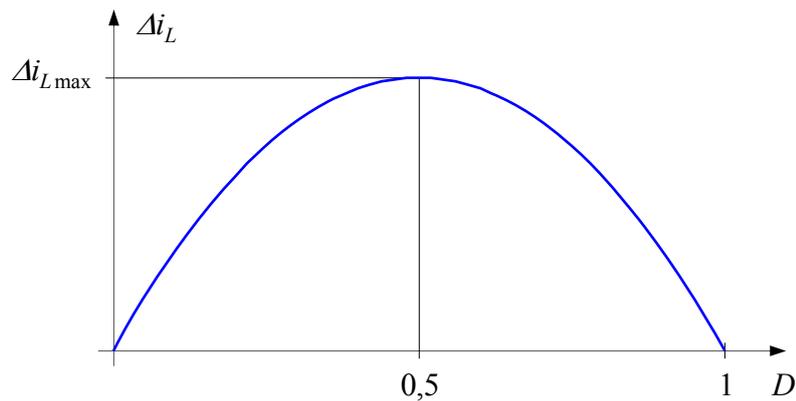
$$\Delta i_L = i_{L \max} - i_{L \min} = i_L(T_e) - i_L(T_s) = \frac{U_2}{L} T_a = \frac{D(1-D) T_s U_1}{L}$$

Die maximale Stromschwankungsbreite ergibt sich folglich für das Tastverhältnis  $D = 0,5$  zu

$$\Delta i_{L \max} = \frac{T_s U_1}{4L} = \frac{U_1}{4L f_s}$$

Damit:

$$\Delta i_L = 4D(1-D) \Delta i_{L \max}$$



Stromschwankung über Tastverhältnis

Die Stromschwankung kann über die *Glättungsdrossel*  $L$  oder über die Schaltperiode  $T_s$  bzw. über die Schaltfrequenz  $f_s = 1/T_s$  beeinflusst werden. Typische Schaltfrequenzen liegen im Bereich einiger 100 Hz (typisch im Leistungsbereich einiger MW mit Spannungen bis zu einigen kV) bis zu 1 MHz (im Kleinspannungsbereich von wenigen Volt und wenigen Watt). Im letzteren Fall kommen typischerweise MOSFET statt Bipolar-Transistoren zum Einsatz.

Ein wichtiges Maß zur Beurteilung der Stromschwankung ist neben dem Spitze-Spitze-Wert die quadratisch bewertete Abweichung vom Mittelwert, also der Effektivwert der Größe

$$i_L(t) - \bar{i}_L,$$

welche wir mit

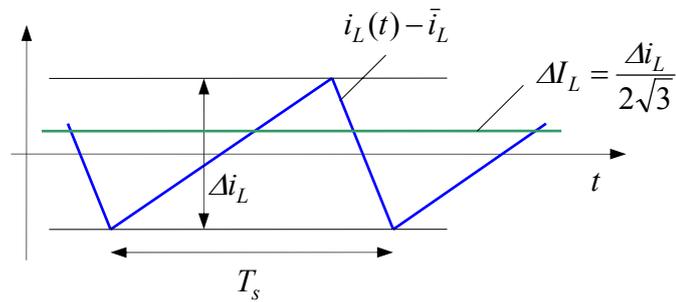
$$\Delta I_L^2 = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} (i_L(t) - \bar{i}_L)^2 dt.$$

bezeichnen. Über diese Größe können die durch die Stromschwankung entstehenden zusätzlichen Verluste bestimmt werden. Beispielsweise ließe sich die in einem Widerstand umgesetzte Leistung durch den arithmetischen Mittelwert und die quadratische Abweichung nach

$$P = R\bar{i}_L^2 + R\Delta I_L^2$$

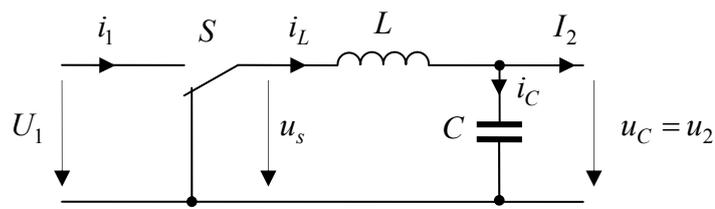
angeben. Das Verhältnis von Scheitelwert eines dreieckförmigen Verlaufs zu seinem Effektivwert ist aber unabhängig von der Form des Dreiecks stets  $\sqrt{3}$ , also

$$\begin{aligned} \Delta I_L &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \Delta i_L \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} 4D(1-D) \Delta i_{L,max} \end{aligned}$$



Zum Effektivwert der Stromschwankung

#### 4.1.2 Tiefsetzsteller mit Kondensator zur Spannungsglättung



Tiefsetzsteller mit Kondensator zur Spannungsglättung

Ist die Ausgangsspannung  $u_2$  nicht von sich aus konstant (z.B. aufgrund der Gegenspannung eines Gleichstrommotors), kann ein Kondensator zur Glättung eingesetzt werden. Es wird ein konstanter Laststrom

$$i_2 = I_2$$

angenommen. Im stationären Zustand muss der Kondensatorstrom

$$i_C(t) = i_L(t) - I_2$$

im zeitlichen Mittel Null sein,  $\bar{i}_C = 0$ . Daher gilt

$$\bar{i}_L = I_2$$

Die resultierende Schwankung der Kondensatorspannung

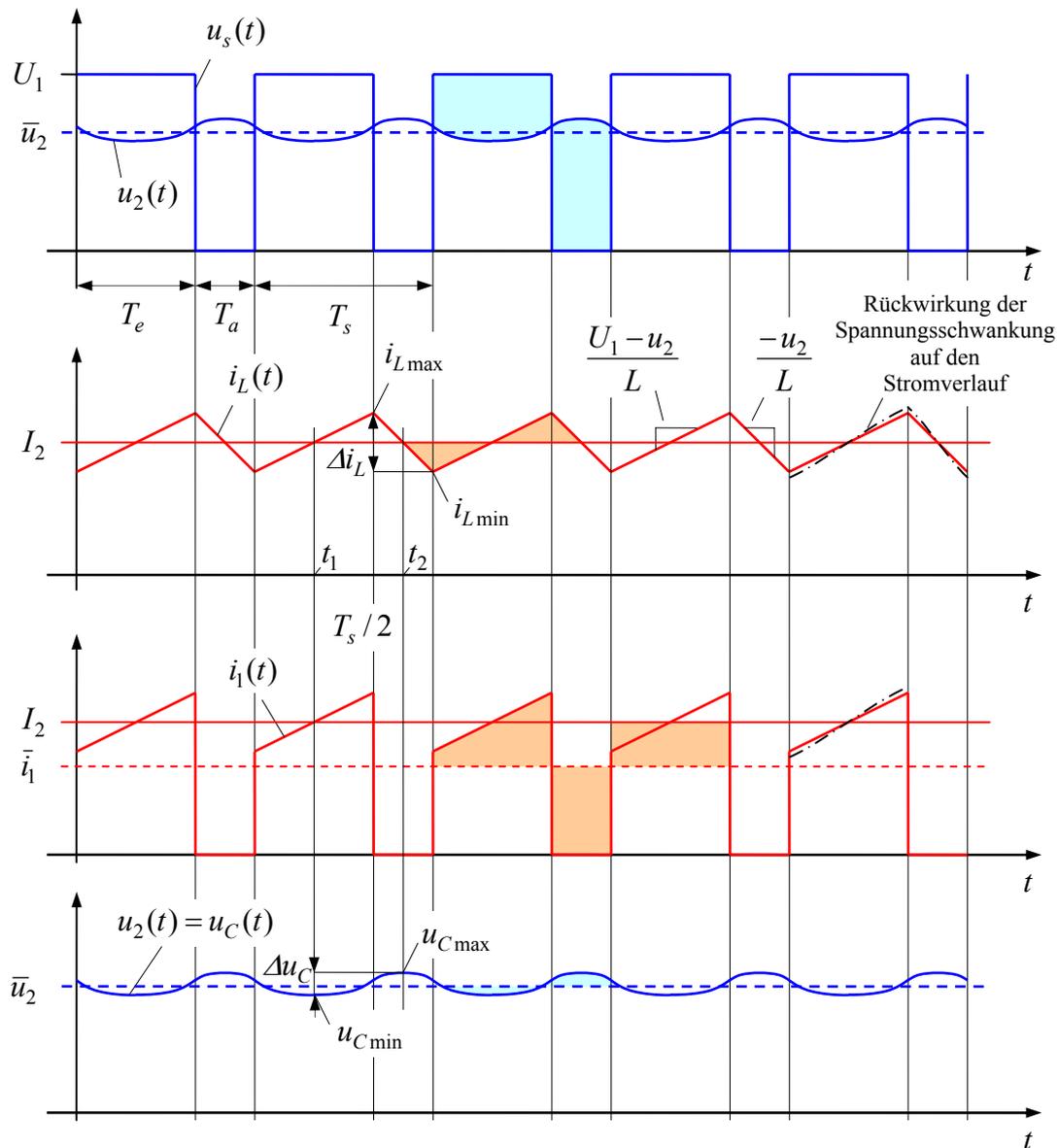
$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t') dt' = \frac{1}{C} \int (i_L(t') - I_2) dt'$$

ergibt sich durch einfache geometrische Betrachtung aus den dreieckförmigen Stromkurvenformen zu (vgl. das folgende Bild)

$$\Delta u_C = u_{C\max} - u_{C\min} = \frac{1}{C} \int_{t_1}^{t_2} (i_L(t') - I_2) dt' = \frac{1}{C} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \Delta i_L (t_2 - t_1) = \frac{1}{4C} \Delta i_L \frac{T_s}{2}$$
$$\Delta u_C = \frac{D(1-D) T_s^2 U_1}{8LC}$$

Hierbei wird vereinfachend angenommen, dass die Spannungsschwankung  $\Delta u_C$  klein gegenüber der mittleren Kondensatorspannung  $\bar{u}_2$  ist, so dass die Rückwirkung auf den Verlauf der Ströme vernachlässigt werden kann. Die maximal mögliche Spannungsschwankung wird bei  $D = 0,5$  erreicht:

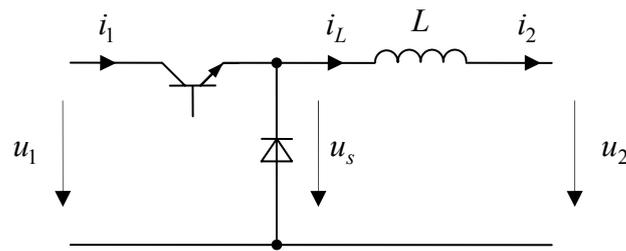
$$\Delta u_{C\max} = \frac{T_s^2 U_1}{32LC}$$



Zeitliche Verläufe beim Tiefsetzsteller mit Glättungskondensator

### 4.1.3 Schaltungstechnische Realisierung

Technisch wird der Schalter des Tiefsetzstellers durch einen Halbleiterschalter (meist ein Bipolar- oder Feldeffekttransistor) und eine Diode realisiert. Diese Schaltungstopologie kann jedoch – selbst bei idealisiertem Schaltverhalten – die volle Funktionalität des idealen Schalters nicht vollständig nachbilden. Diese Topologie kann nur positive Ströme bei positiver Spannung führen (s. das folgende Bild, vgl. aber Abschnitt 4.3). Der Steller beherrscht nur einen Quadranten.



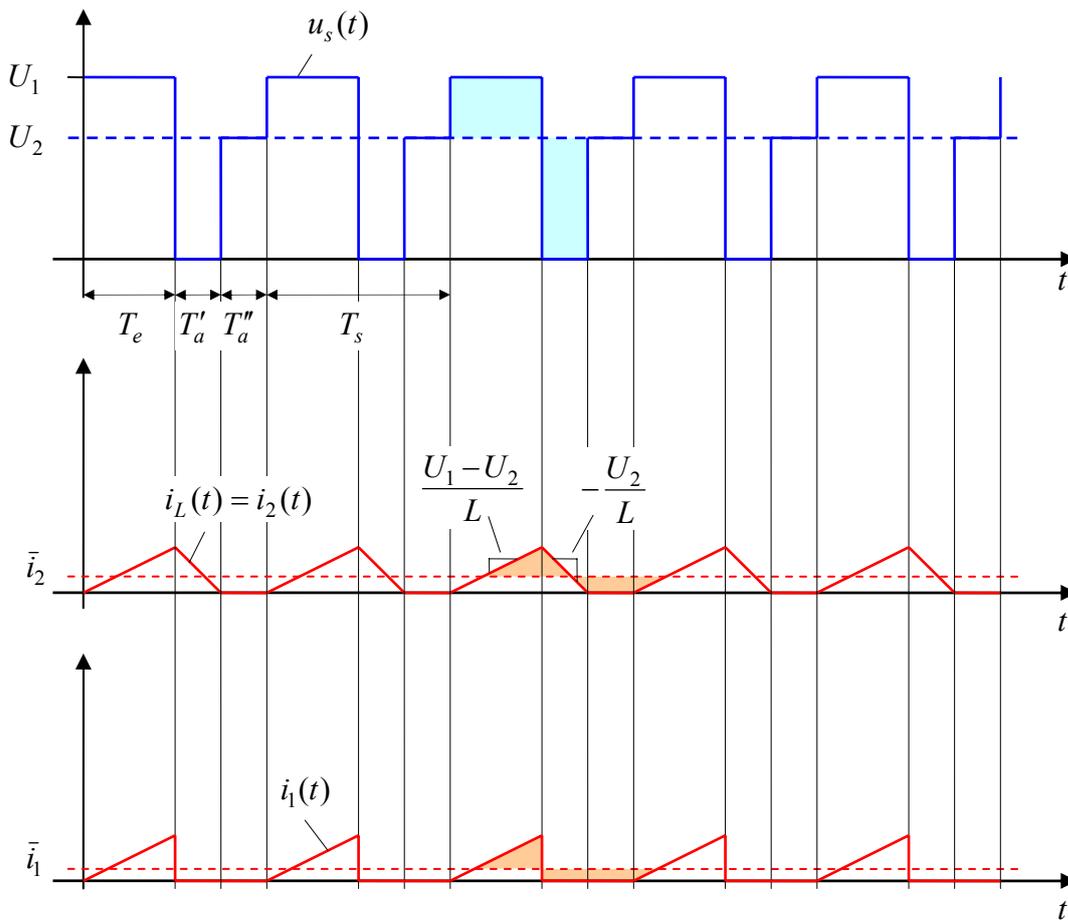
Realisierung des Tiefsetzstellers mit Transistor und Diode

#### 4.1.4 Lücken beim Tiefsetzsteller

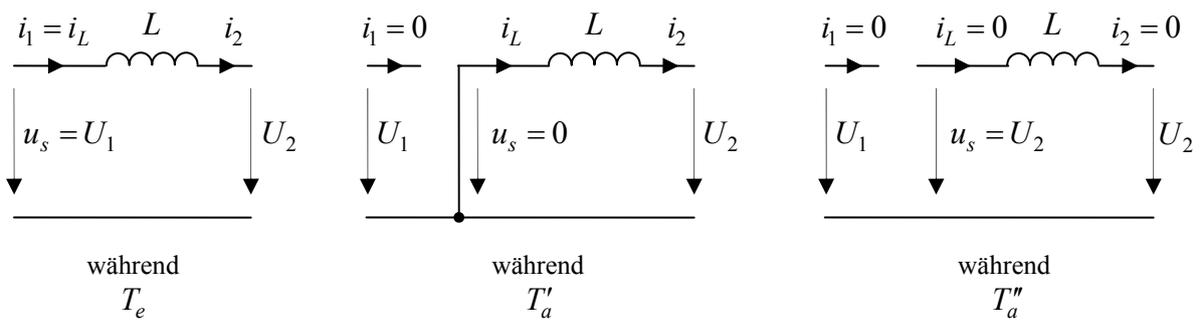
Die Realisierung des idealen Schalters durch Diode und Transistor beim Tiefsetzsteller führt dazu, dass der Schalter nur in einer Richtung Strom und Leistung führen kann. Ist der mittlere Strom klein, kann die Stromschwankung aufgrund der Pulsung dazu führen, dass im Minimum der Strom sogar Null wird. Der Strom erlischt, da die Diode den Strom nicht umgekehrt leiten kann. Der Strom bleibt solange Null, bis der Transistor in der nächsten Einschaltzeit wieder angesteuert wird. Der Stromfluss zeigt während der Zeit  $T'_a$  eine Lücke, der Strom *lückt*. Dieser Vorgang wird als *Lücken* bezeichnet.

Im Lückbetrieb verändert sich das Spannungsverhältnis, es wird nicht mehr allein durch das Tastverhältnis bestimmt:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{T_e}{T_e + T'_a} \neq D$$



Lücken beim Tiefsetzsteller



Ersatzschaltbilder des Tiefsetzstellers im Lückbetrieb

Transistor leitet:  $T_e, D = \frac{T_e}{T_s}$

Diode leitet:  $T'_a, D' = \frac{T'_a}{T_s}$

Lückgrenze:

$$\bar{i}_2 = \bar{i}_L \geq \frac{1}{2} \Delta i_L = 2D(1-D)\Delta i_{L\max}$$

mit

$$\Delta i_{L\max} = \frac{T_s U_1}{4L}.$$

Stromschwankung im lückenden Betrieb auswerten:

steigende Flanke:  $\Delta i_L = \frac{U_1 - U_2}{L} T_e = \frac{U_1 - U_2}{L} D T_s$

fallende Flanke:  $\Delta i_L = \frac{U_2}{L} T'_a = \frac{U_2}{L} D' T_s$

Division der Gleichungen führt zu

$$\frac{D'}{D} = \frac{U_1 - U_2}{U_1} = \frac{U_1}{U_2} - 1$$

Strommittelwert im lückenden Betrieb:

$$\begin{aligned} \bar{i}_2 = \bar{i}_L &= \frac{1}{2} \Delta i_L \frac{T_e + T'_a}{T_s} = \frac{1}{2} \Delta i_L (D + D') = \frac{1}{2} \Delta i_L D \frac{U_1}{U_2} \\ &= \frac{1}{2L} \frac{U_1(U_1 - U_2)}{U_2} D^2 T_s = \frac{D^2 T_s}{2L} \left( \frac{U_1^2}{U_2} - U_1 \right) = 2D^2 \left( \frac{U_1}{U_2} - 1 \right) \Delta i_{L\max} \end{aligned}$$

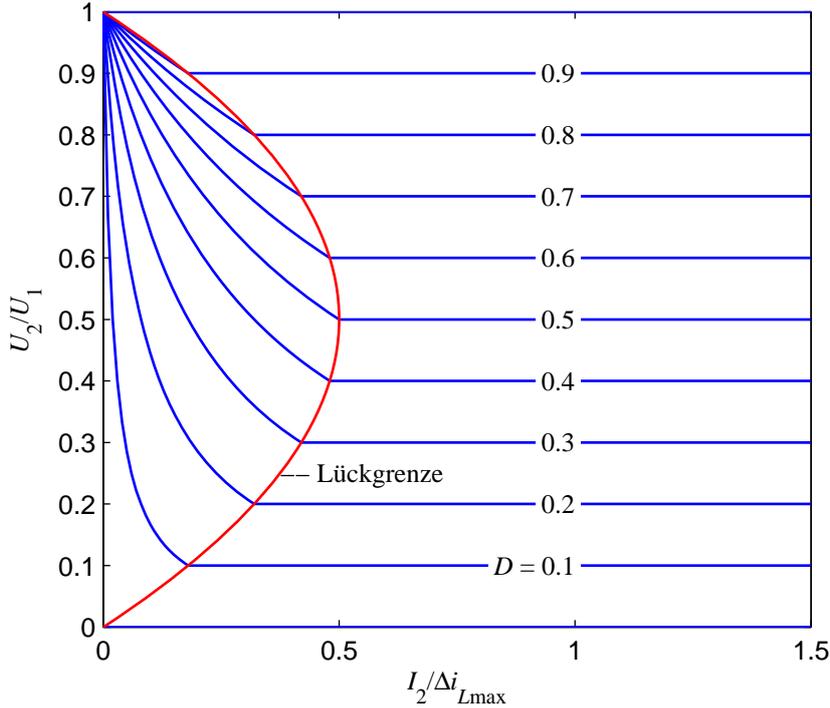
Durch Auflösung nach dem Spannungsverhältnis erhält man die Beziehung für die bezogene Ausgangsspannung in Abhängigkeit vom mittleren Laststrom:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{1 + \frac{\bar{i}_L}{2\Delta i_{L\max} D^2}} = \frac{1}{1 + \frac{\bar{i}_2}{2\Delta i_{L\max} D^2}}$$

Im lückenden Betrieb wird dagegen (bei angenommener verlustfreier Drossel) die Ausgangsspannung allein durch das Tastverhältnis bestimmt und unabhängig vom Strom:

$$\frac{U_2}{U_1} = D$$

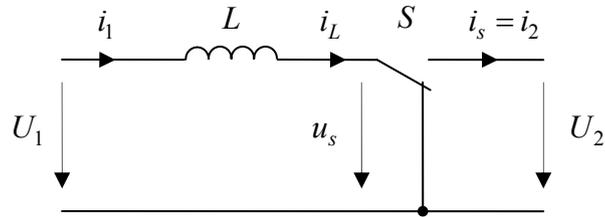
Das folgende Bild zeigt das Spannungsverhältnis für lückfreien sowie für lückenden Betrieb in Abhängigkeit vom Laststrom. Im lückfreien Betrieb ist die Ausgangsspannung unabhängig vom Laststrom und hängt nur vom Tastverhältnis ab. Die Ausgangsspannung beim lückenden Betrieb weist dagegen eine starke Abhängigkeit vom Laststrom auf.



Belastungskennlinie für den Tiefsetzsteller

## 4.2 Hochsetzsteller

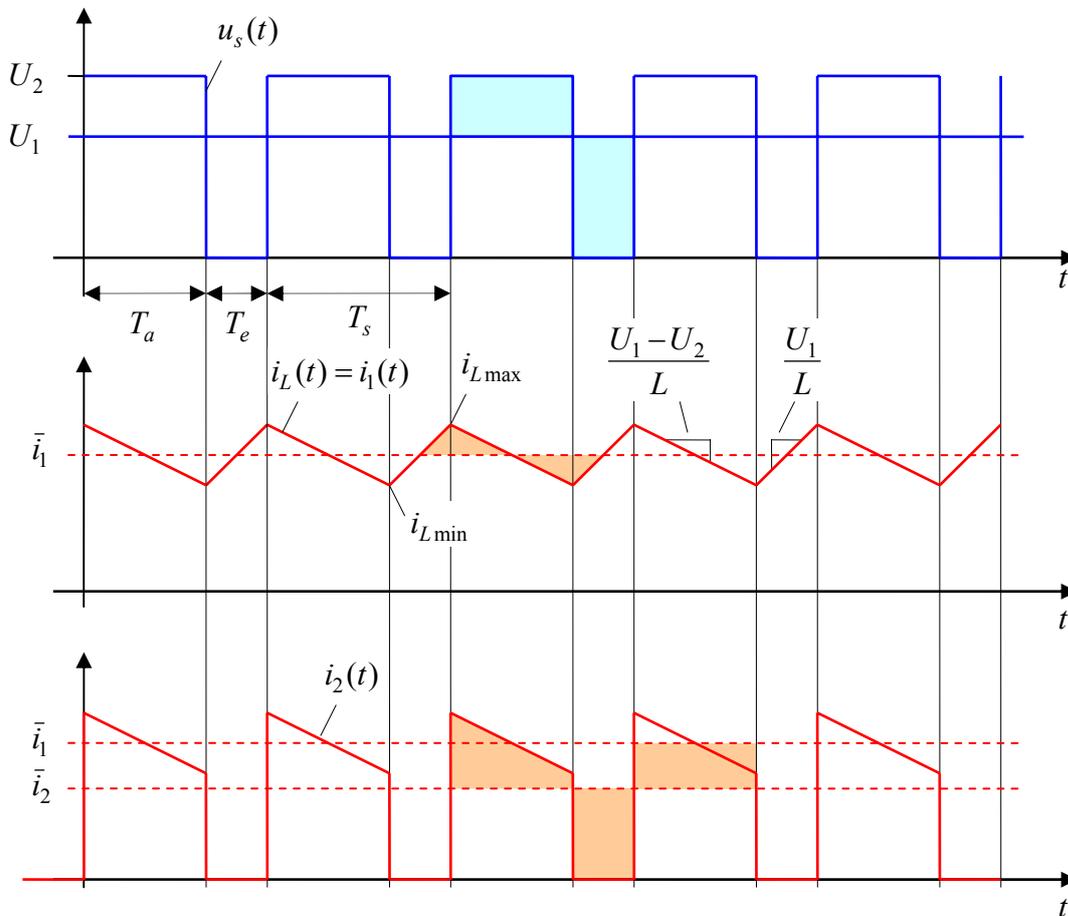
### 4.2.1 Funktionsprinzip



Prinzipbild des Hochsetzstellers

Annahme konstanter Spannungen:

$$u_1(t) = U_1 \quad , \quad u_2(t) = U_2 \quad .$$



Zeitliche Verläufe beim Hochsetzsteller im stationären Zustand

Die Intervalle  $T_e$  und  $T_a$  werden hier anders definiert als beim Tiefsetzsteller. Die Motivation dazu ergibt sich erst beim Blick auf die Realisierung des Schalter durch Transistor und Diode (s. u.).

Tastverhältnis:

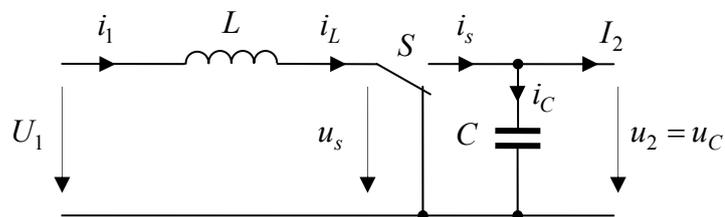
$$D = \frac{T_e}{T_s}$$

Im stationären Zustand gilt:

$$1 - D = \frac{U_1}{U_2} = \frac{\bar{i}_2}{\bar{i}_1}$$

$$\Delta i_L = i_{L\max} - i_{L\min} = \frac{U_1}{L} T_e = \frac{DT_s U_1}{L} = \frac{D(1-D) T_s U_2}{L}$$

#### 4.2.2 Hochsetzsteller mit Kondensator zur Spannungsglättung



Hochsetzsteller mit Kondensator zur Spannungsglättung

Glättung der Ausgangsspannung mit Glättungskondensator. Annahme konstanten Laststroms

$$i_2(t) = I_2$$

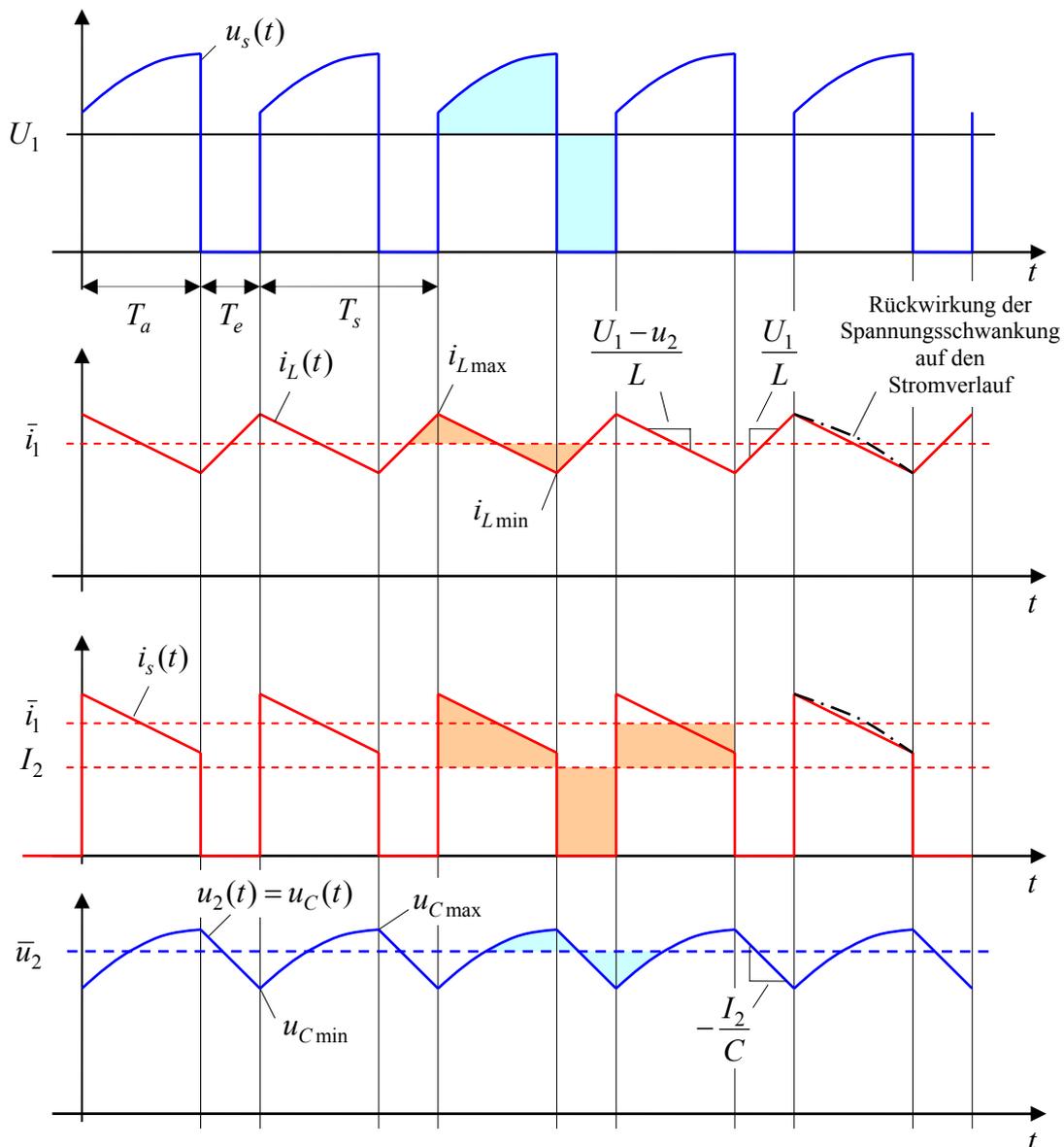
Im stationären Zustand gilt wegen  $\bar{i}_C = 0$

$$\bar{i}_s = I_2$$

Spannungsschwankung:

$$\Delta u_C = u_{C\max} - u_{C\min} = \frac{I_2}{C} T_e = \frac{I_2 D T_s}{C} = \frac{D(1-D) T_s \bar{i}_1}{C},$$

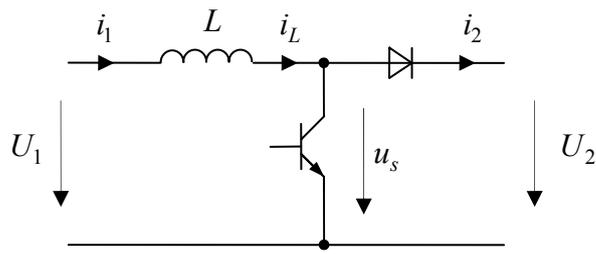
wobei die Rückwirkung der Spannungsschwankung auf die Stromverläufe vernachlässigt wurde.



Zeitliche Verläufe beim Hochsetzsteller mit Glättungskondensator

### 4.2.3 Schaltungstechnische Realisierung

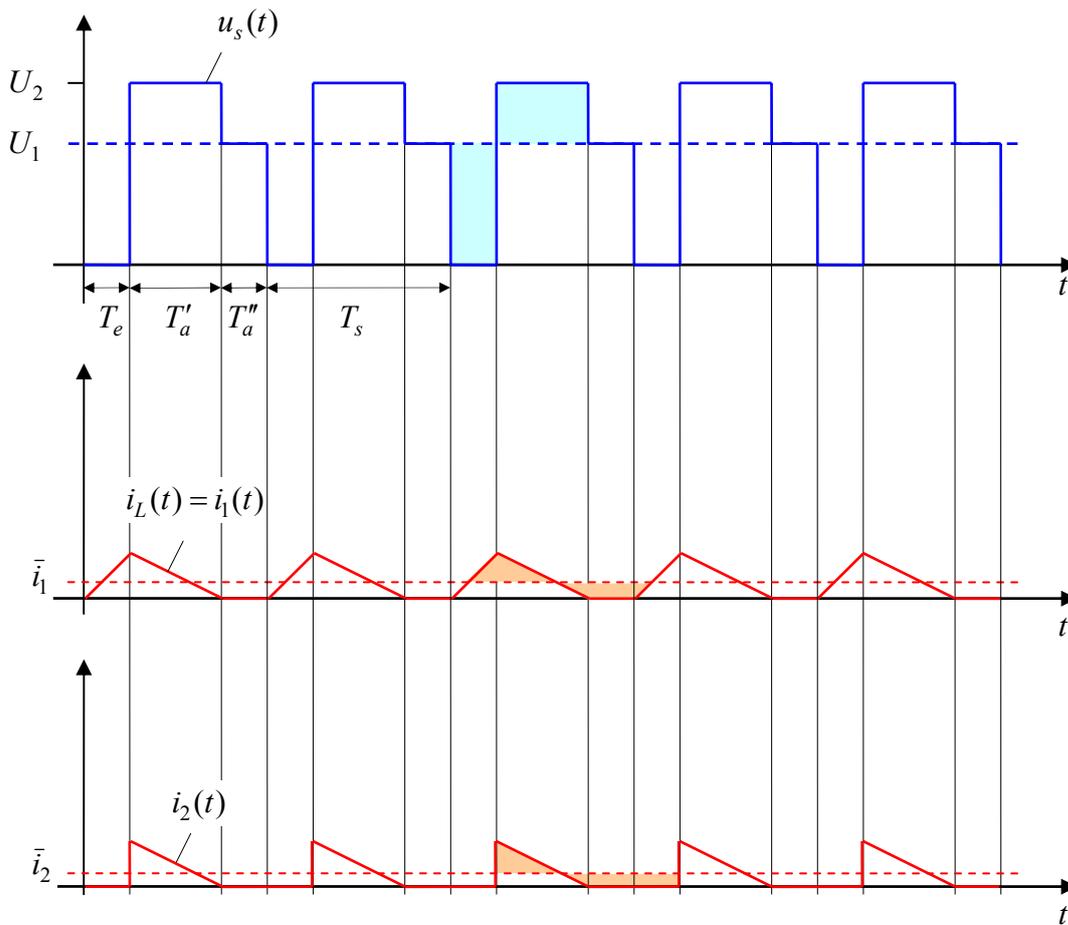
Das nachfolgende Bild zeigt die Realisierung des Hochsetzstellers mit einem Transistor und einer Diode. Auch diese Schaltungstopologie kann nur positive Ströme bei positiver Spannung beherrschen. Vgl. aber Abschnitt 4.3.



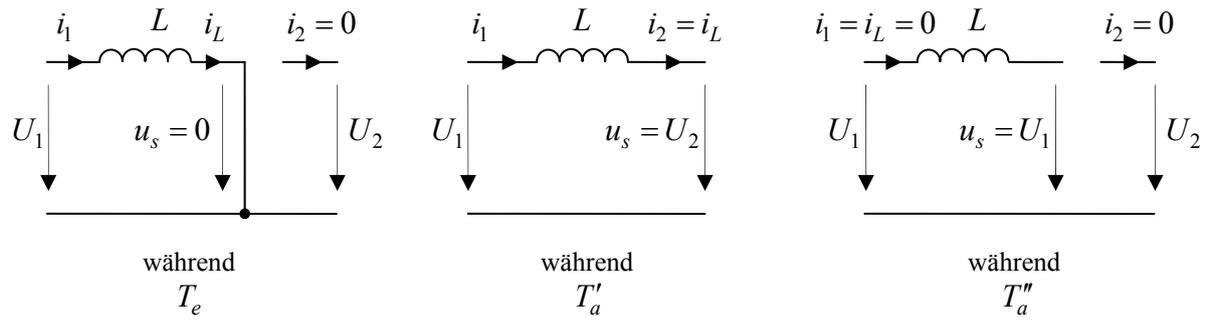
Realisierung des Hochsetzstellers mit Transistor und Diode

Die Drossel des Hochsetzstellers hat eine etwas andere Bedeutung als beim Tiefsetzsteller. Anders als bei diesem kann beim Hochsetzsteller keinesfalls auf die Drossel verzichtet werden. Durch den getakteten Betrieb wird sie im Kurzschluss mit Energie aufgeladen, die sie dann an den Ausgang abgibt (Funktion als *Speicherdrossel*).

4.2.4 Lücken beim Hochsetzsteller



Lücken beim Hochsetzsteller

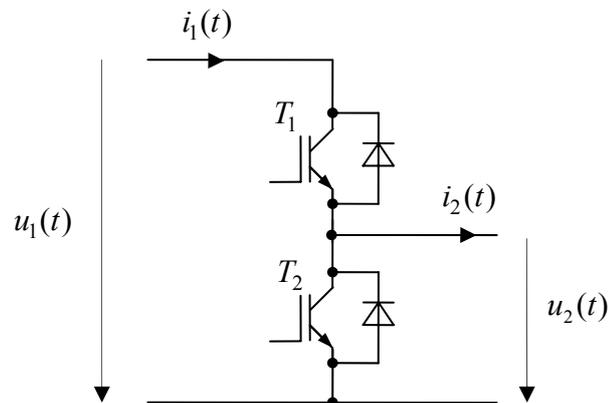


Ersatzschaltbilder des Hochsetzstellers im Lückbetrieb

Die Formeln sind entsprechend vom Tiefsetzsteller zu übertragen.

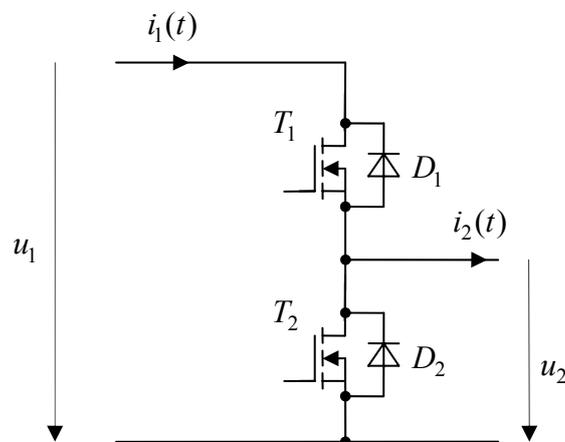
### 4.3 Weitere aus dem Tiefsetzsteller abgeleitete Schaltungen

#### 4.3.1 Bidirektionaler Gleichstromsteller mit Umkehrung der Stromrichtung



Bidirektionaler Gleichstromsteller (Zwei-Quadranten-Steller),  
Realisierung mit IGBT und Dioden

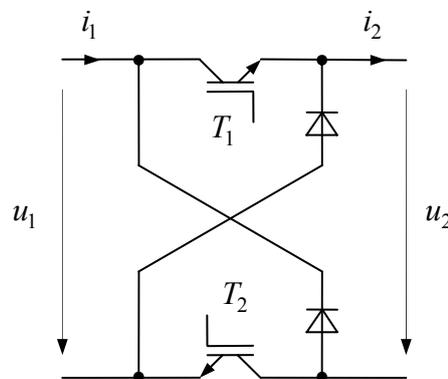
Der bidirektionale Tiefsetzsteller ist mit zwei Transistoren und zwei antiparallelen Dioden ausgerüstet, um den Strom in beide Richtungen führen zu können. Die Transistoren werden komplementär angesteuert. Der Steller verhält sich je nach Richtung des Stromflusses wie ein Tief- oder Hochsetzsteller. Die Problematik des Lückens tritt hier nicht auf. Die Richtung der Spannung ist bei dieser Schaltungstopologie weiterhin nicht umkehrbar. Der Steller beherrscht also zwei der vier möglichen Strom-Spannungsquadranten. Er kann als *Zwei-Quadranten-Steller* bezeichnet werden.



Bidirektionaler Gleichstromsteller (Zwei-Quadranten-Steller),  
Realisierung mit MOSFET und Dioden  
(entweder integrierte Bodydioden oder zusätzliche externe Dioden).

Die Schaltung mit zwei MOSFET wird sogar mit Vorteil für den Ein-Quadranten-Betrieb eingesetzt, da ein leitender MOSFET einen geringen Spannungsabfall als eine Diode aufweist und – anders als ein Bipolartransistor – den Strom auch in *inverser* Richtung führen kann. Bei positivem Strom  $i_2$  leitet dann der MOSFET  $T_2$  in umgekehrter Richtung. Dadurch können die Verluste insbesondere bei kleinen Betriebsspannungen erheblich reduziert werden. Obwohl die Diode  $D_2$  bei angesteuertem Transistor  $T_2$  also keinen Strom führt, sollte zum Zwecke einer geordneten Kommutierung unter Einhaltung der Wechselsperrzeit auf diese nicht verzichtet werden (ggf. sowieso vorhandene interne Body-Diode). Die Diode  $D_1$  wäre für den Ein-Quadranten-Betrieb allerdings entbehrlich.

#### 4.3.2 Bidirektionaler Gleichstromsteller mit Umkehrung der Spannungsrichtung



Bidirektionaler Tiefsetzsteller mit Umkehrung der Spannung  
(asymmetrische Halbrücke)

Voraussetzung:

$$i_2 > 0, \quad u_1 > 0$$

Schaltfunktion

$$s(t) \in \{-1, 0, +1\}$$

$$u_2(t) = s(t)u_1(t)$$

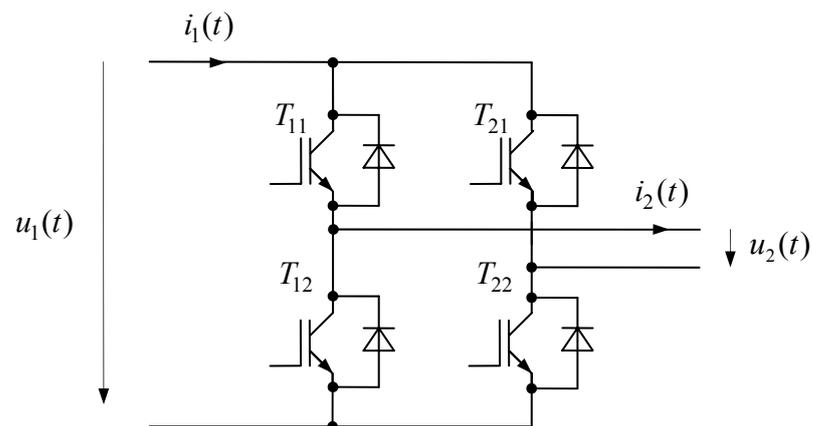
$$i_1(t) = s(t)i_2(t)$$

$s$	$T_1$	$T_2$	$u_2$	$i_1$
+1	1	1	$+u_1$	$+i_2$
-1	0	0	$-u_1$	$-i_2$
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0

### 4.3.3 Vier-Quadranten-Steller

Einsatzgebiete:

- Stromrichter für Gleichstrommotoren, wenn sowohl beide Drehrichtungen sowie motorischer und generatorischer Betrieb beherrscht werden müssen.
- Stromrichter für Einphasen-Wechselstrommotoren (Asynchronmotor, Synchronmotor)
- Gleichrichter (Netzstromrichter) für Einphasen-Wechselspannung.



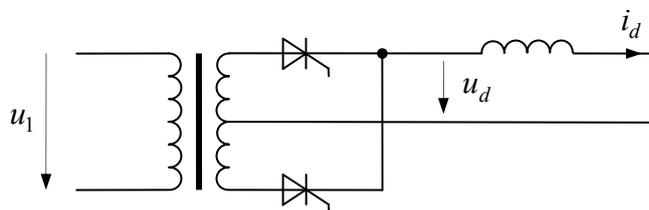
Vier-Quadranten-Steller, Realisierung mit IGBT

## 5 Fremdgeführte Umrichter

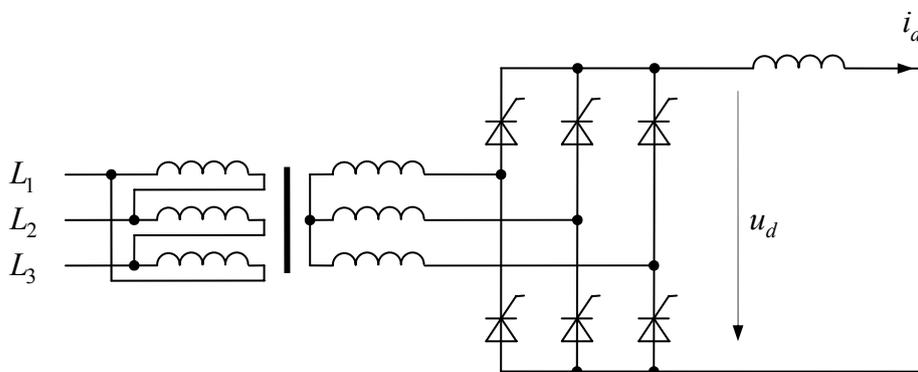
Im Gegensatz zu selbstgeführten Umrichtern, bei denen die Kommutierung allein durch die Ansteuerung des leistungselektronischen Schalters ausgelöst wird, benötigen *fremdgeführte* Umrichter zur Kommutierung eine passende Gegenspannung. Je nach Einsatzbereich spricht man von *netzgeführten* oder *lastgeführten* Stromrichtern.

Die folgenden Schaltungen können dazu eingesetzt werden, eine Wechsel- oder Drehspannung in eine Gleichspannung umzuformen.

### 5.1 Thyristor-Mittelpunkt- und Brückenschaltungen

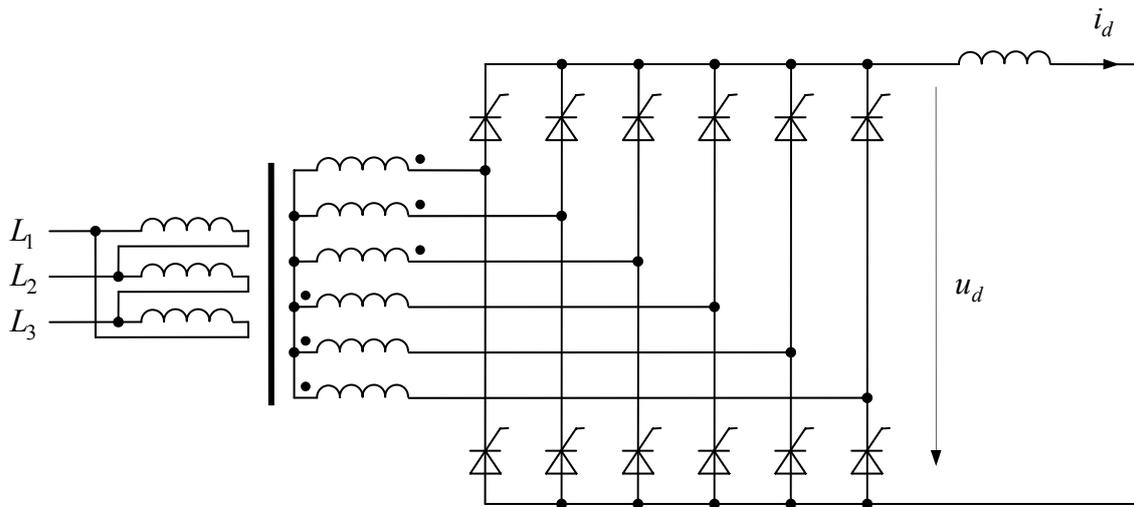


M2-Schaltung



B6-Schaltung

Die B6-Schaltung kann auch ohne Transformator direkt am Netz betrieben werden. Das ausgangsseitige Potenzial wird dann aber durch die Leiterspannungen festgelegt. In diesem Fall wird auch eine Kommutierungsinduktivität benötigt, die beim Betrieb mit Transformator durch dessen Streuinduktivität bereitgestellt wird.



B12-Schaltung

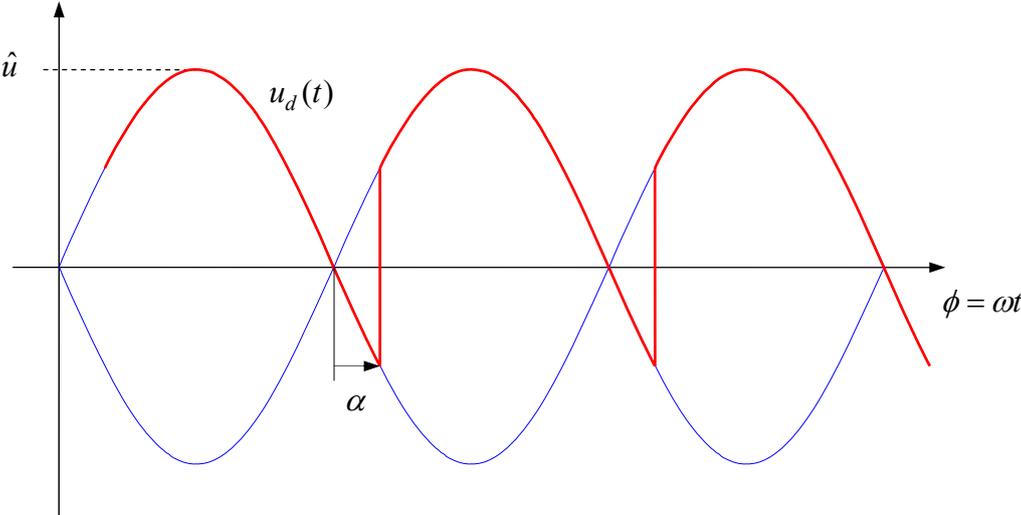
Allgemein:  $p$ -pulsige Schaltung. Die maximale mittlere Ausgangsspannung wird über die Mittelung über einen „Puls“ der Länge  $2\pi/p$  bestimmt

$$U_{d\max} = \frac{1}{2\pi/p} \int_{-\pi/p}^{\pi/p} \hat{u} \cos \gamma \, d\gamma = \hat{u} \frac{p}{\pi} \sin \frac{\pi}{p} = U \frac{\sqrt{2} p}{\pi} \sin \frac{\pi}{p}$$

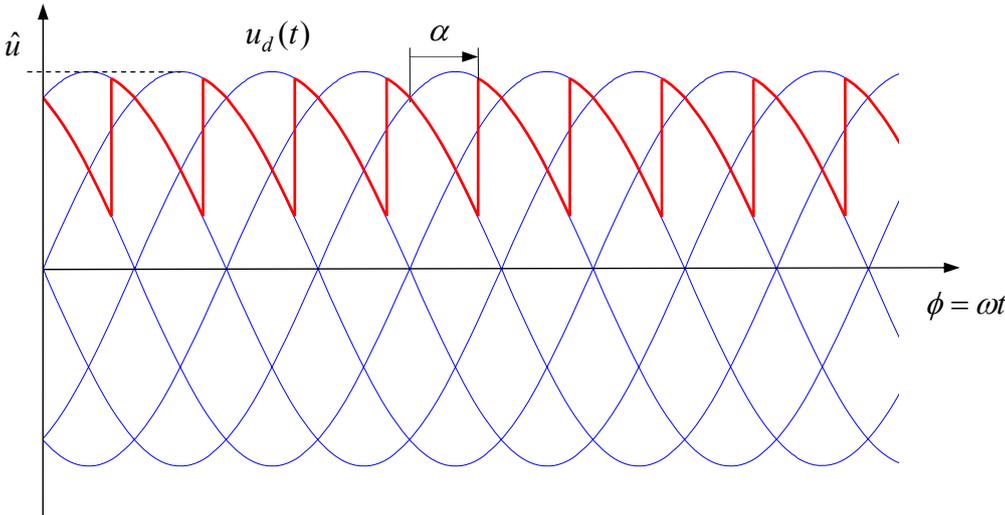
Spannungsmittelwert in Abhängigkeit des Steuerwinkels  $\alpha$  :

$$U_d = \frac{p}{2\pi} \int_{\alpha - \frac{\pi}{p}}^{\alpha + \frac{\pi}{p}} \hat{u} \cos \varphi \, d\varphi = \hat{u} \frac{p}{2\pi} \left[ \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{p} \right) - \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{p} \right) \right] = \hat{u} \frac{p}{\pi} \cos \alpha \sin \frac{\pi}{p}$$

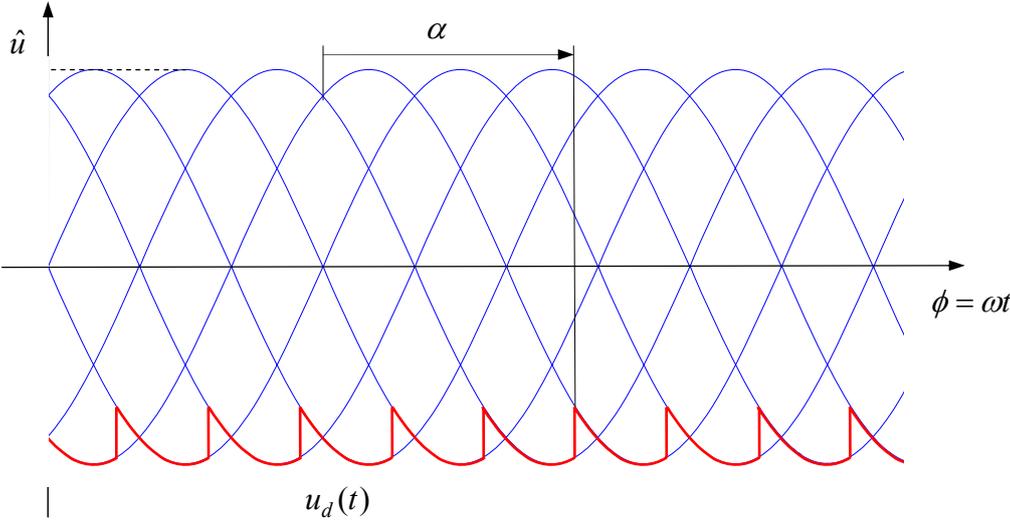
$$U_d = U_{d\max} \cos \alpha$$



Spannungsverlauf einer zweipulsigen Schaltung  
Steuerwinkel  $\alpha = 30^\circ$

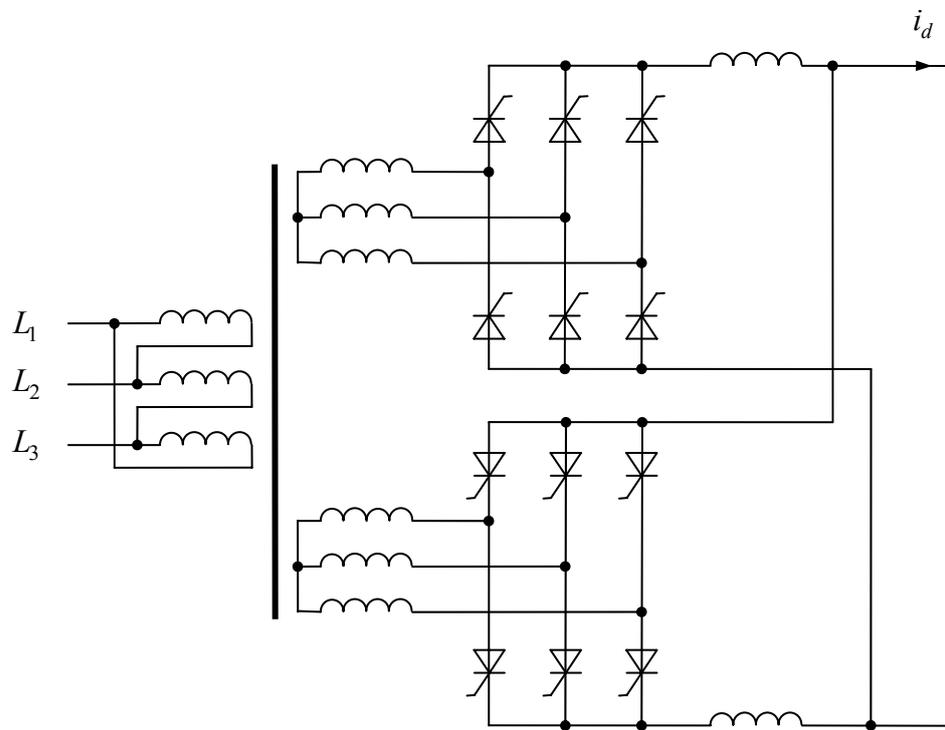


Spannungsverlauf einer sechspulsigen Schaltung  
Steuerwinkel  $\alpha = 45^\circ$

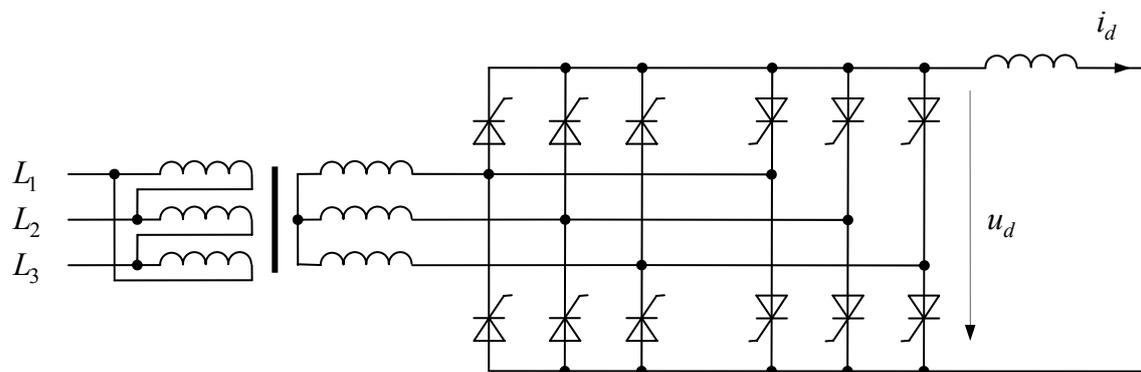


Spannungsverlauf einer sechspulsigen Schaltung  
Steuerwinkel  $\alpha = 165^\circ$

## 5.2 Umkehrstromrichter



Kreisstrombehafteter Umkehrstromrichter



Kreisstromfreier Umkehrstromrichter

Durch seine beiden antiparallelen Brücken kann der Umkehrstromrichter beide Strom- und Spannungsrichtungen beherrschen.

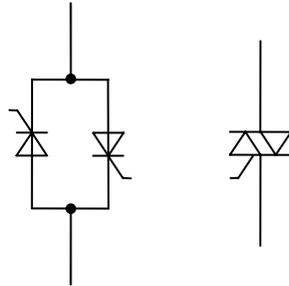
Beim kreisstromfreien Umkehrstromrichter darf jedoch immer nur eine Brücke aktiv sein, da andernfalls ein Kurzschluss entsteht. Jede der beiden Brücken ist für eine Stromrichtung zuständig. Der Wechsel der Brücken, also dann, wenn eine Umkehrung der Stromrichtung notwendig wird, erfolgt nach folgendem Schema:

- 
- Steuerwinkel der aktiven Brücke in Wechselrichterendlage stellen (Thyristoren müssen wegen Gefahr des Wechselrichterkippen solange weiter gezündet werden, bis der Strom erloschen ist)
  - Abwarten, bis der Strom erloschen ist
  - Sperren der bislang aktiven Brücke, d.h. keine weiteren Zündimpulse erzeugen
  - Aktivieren der anderen Brücke

Der kreisstrombehaftete Umkehrstromrichter kann dagegen sehr schnell von einer Stromrichter zur anderen umgeschaltet werden. Durch gleichzeitigen Betrieb beider Brücken im Bereich kleiner Ströme kann man durch einen Kreisstrom auch das Lücken vollständig vermeiden.

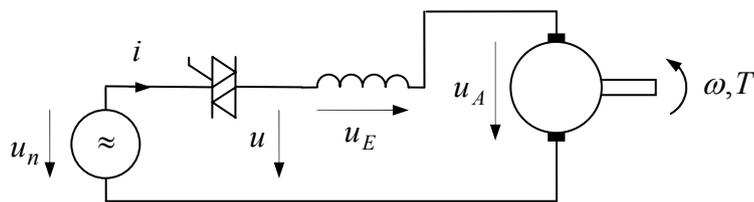
### 5.3 Wechselspannungssteller

In Wechselspannungsstellern, insbesondere im Konsum- und Kleinleistungsbereich, werden häufig Triacs eingesetzt. Ein Triac lässt sich funktionell als Antiparallelschaltung zweier Thyristoren verstehen.

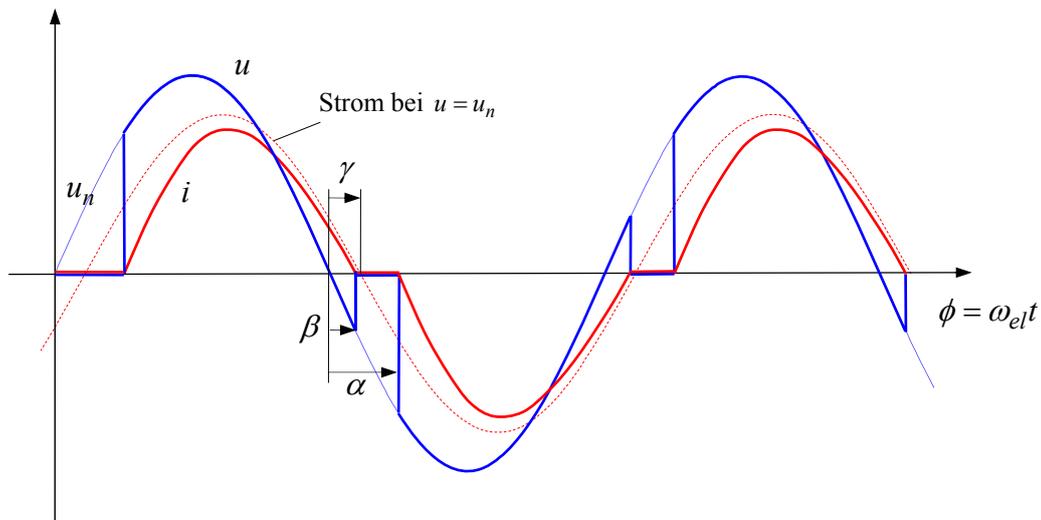


Triac als Antiparallelschaltung zweier Thyristoren

Mit einem durch eine Triac-Schaltung gespeisten Universalmotor (Reihenschlussmotor in WS-Speisung) lassen sich einfache drehzahlverstellbare Antriebe aufbauen:



Phasenanschnittsteuerung für Universalmotor



Verläufe von Strom und Spannung einer Phasenanschnittsteuerung bei ohmsch-induktiver Last

Der Universalmotor verhält sich an seinen Klemmen wie ein  $RL$ -Glied mit

$$R'(\omega_{me}) = R_A + R_E + L'_E \omega_{me}, \quad L = L_A + L'_E,$$

wobei der Ersatzwiderstand  $R'$  von der Drehfrequenz  $\omega_{me}$  abhängig ist. Bei stationärer sinusförmiger Speisung

$$u(\phi) = u_n(\phi) = \hat{u} \sin \phi$$

bestimmt sich der Phasenwinkel  $\gamma$  zwischen Spannung und Strom

$$i(\phi) = \hat{i} \sin(\phi - \gamma)$$

nach

$$\tan \gamma = \frac{\omega_{el} L}{R'(\omega_{me})} = \omega_{el} \tau$$

mit der drehzahlabhängigen Zeitkonstante

$$\tau = \frac{L}{R'(\omega_{me})}.$$

Die Stromamplitude bestimmt sich zu

$$\hat{i} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R'^2(\omega_{me}) + \omega_{el}^2 L^2}}$$

Bei Speisung durch die Phasenanschnittsschaltung ergibt sich der Stromverlauf durch eine Superposition eines sinusförmigen Abschnitts mit einem mit der Zeitkonstante  $\tau$  exponentiell abklingenden Anfangswertanteils:

$$i(\phi) = \hat{i} \left( \sin(\phi - \gamma) - \sin(\alpha - \gamma) e^{-\frac{\phi - \alpha}{\omega_{el}\tau}} \right) \text{ für } \alpha \leq \omega t \leq \pi + \beta.$$

Der Koeffizient der Exponentialfunktion ist so gewählt, so dass die Anfangsbedingung  $i(\alpha) = 0$  erfüllt wird. Der Winkel  $\beta$ , bei dem der Strom wieder verlischt, lässt sich aus der Bedingung

$$i(\pi + \beta) = \hat{i} \left( -\sin(\beta - \gamma) - \sin(\alpha - \gamma) e^{-\frac{\pi + \beta - \alpha}{\omega_{el}\tau}} \right) = 0$$

$$\sin(\beta - \gamma) = -\sin(\alpha - \gamma) e^{-\frac{\pi + \beta - \alpha}{\omega_{el}\tau}}$$

bestimmen, was allerdings eine transzendente Gleichung darstellt, die nicht geschlossen gelöst werden kann. Unter der Annahme, dass der Winkel  $\beta$  nicht viel von  $\gamma$  abweicht (s. Zeitverläufe im obigen Bild), also  $\gamma - \beta \ll 1$ , lässt sich eine Näherungslösung entwickeln:

$$\sin(\beta - \gamma) = -\sin(\alpha - \gamma) e^{-\frac{\pi + \gamma - \alpha}{\omega_{el}\tau}} e^{\frac{\gamma - \beta}{\omega_{el}\tau}}$$

$$\beta - \gamma = -\sin(\alpha - \gamma) e^{-\frac{\pi + \gamma - \alpha}{\omega_{el}\tau}} \left( 1 + \frac{\gamma - \beta}{\omega_{el}\tau} \right)$$

$$\beta \omega_{el}\tau = \gamma \omega_{el}\tau - \sin(\alpha - \gamma) e^{-\frac{\pi + \gamma - \alpha}{\omega_{el}\tau}} (\omega_{el}\tau + \gamma - \beta)$$

$$\beta \left( \omega_{el}\tau - \sin(\alpha - \gamma) e^{-\frac{\pi + \gamma - \alpha}{\omega_{el}\tau}} \right) = \gamma \omega_{el}\tau - \sin(\alpha - \gamma) e^{-\frac{\pi + \gamma - \alpha}{\omega_{el}\tau}} (\omega_{el}\tau + \gamma)$$

$$\beta = \frac{\gamma \omega_{el}\tau - \sin(\alpha - \gamma) e^{-\frac{\pi + \gamma - \alpha}{\omega_{el}\tau}} (\omega_{el}\tau + \gamma)}{\omega_{el}\tau - \sin(\alpha - \gamma) e^{-\frac{\pi + \gamma - \alpha}{\omega_{el}\tau}}}$$

Für sehr kleine Zeitkonstanten  $\omega_{el}\tau \ll 1$  folgt  $\beta \approx \gamma$ .

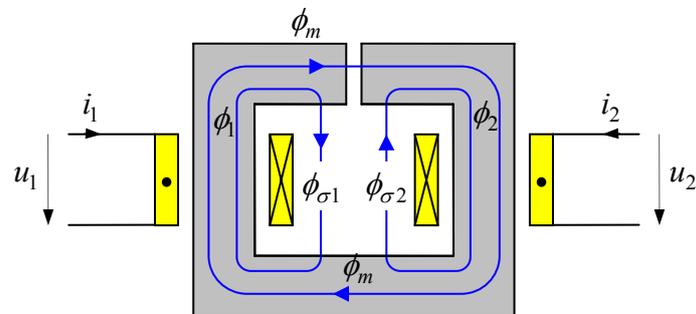
Im normalen Phasenanschnittsbetrieb muss  $\alpha > \beta$  eingehalten werden. Ist der Steuerwinkel  $\alpha < \beta$ , führt das dazu, dass der Triac bereits wieder angesteuert wird, wenn der Strom noch gar nicht erloschen ist. Bei impulsförmiger Ansteuerung ist das Ergebnis, dass jeder 2. Steuerimpuls ohne Wirkung bleibt und entsprechend jede 2. Halbschwingung ausfällt. Steht dagegen das Ansteuersignal im gesamten Intervall  $\alpha < \phi < \pi$  an, so dass der Triac auch noch nach dem Winkel  $\alpha$  gezündet wird, wird die Netzspannung vollständig durchgeschaltet. Ein Phasenanschnitt findet dann nicht mehr statt.

Für den Fall  $\alpha > \beta$  soll der Grundschwingsanteil  $u_1$  der Spannung  $u(t)$  bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(\phi) \sin \phi \, d\phi = \hat{u} - \frac{2}{\pi} \int_{\beta}^{\alpha} \hat{u} \sin^2 \phi \, d\phi = \hat{u} \left[ 1 - \frac{1}{\pi} \int_{\beta}^{\alpha} (1 - \cos 2\phi) \, d\phi \right] \\
 &= \hat{u} \left[ 1 - \frac{\alpha - \beta}{\pi} + \frac{1}{2\pi} (\sin 2\alpha - \sin 2\beta) \right] \\
 &= \hat{u} \left[ 1 - \frac{\alpha - \beta}{\pi} + \frac{1}{\pi} \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) \right]
 \end{aligned}$$

## 6 Wechselstromtransformatoren

### 6.1 Modellierung von Transformatoren mit Streuung



Streuflüsse im Transformator  
hier mit Luftspalt

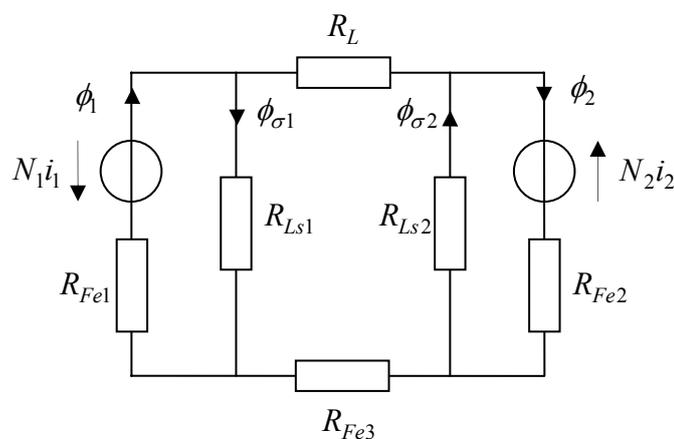
#### Begriffe:

*Streuung:* Die nicht vollständige Verkettung zweier Wicklungen.

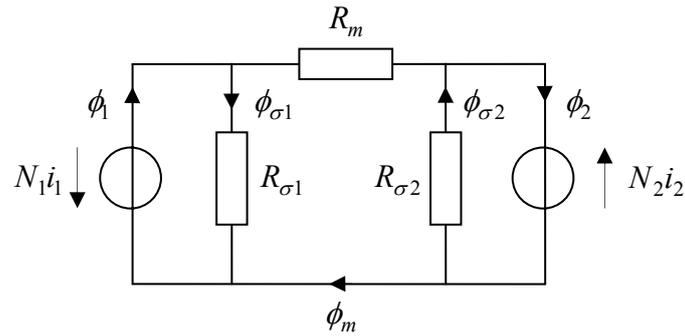
*Streuflüsse:* Der Anteil des Flusses einer Wicklung, der nicht mit der anderen verkettet ist:  
 $\phi_{\sigma 1}, \phi_{\sigma 2}$

*Hauptfluss  $\phi_m$ :* Der Anteil des Flusses, der beide Wicklungen miteinander verkettet (*m*: *main* oder *mutual*).

Eine Streuung ist nicht grundsätzlich unerwünscht, sondern ist bei manchen Anwendungen durchaus sinnvoll und nutzbringend.



Reluktanzmodell mit Luftspalt und Streuwegen.



Vereinfachtes Reluktanzmodell

Berechnung des magnetischen Kreises:

$$\phi_{\sigma 1} = \frac{N_1 i_1}{R_{\sigma 1}} \quad , \quad \phi_{\sigma 2} = \frac{N_2 i_2}{R_{\sigma 2}} \quad , \quad \phi_m = \frac{N_1 i_1 + N_2 i_2}{R_m}$$

$$\phi_1 = \left( \frac{1}{R_{\sigma 1}} + \frac{1}{R_m} \right) N_1 i_1 + \frac{1}{R_m} N_2 i_2 = (\mathcal{A}_m + \mathcal{A}_{\sigma 1}) N_1 i_1 + \mathcal{A}_m N_2 i_2$$

$$\phi_2 = \left( \frac{1}{R_{\sigma 2}} + \frac{1}{R_m} \right) N_2 i_2 + \frac{1}{R_m} N_1 i_1 = (\mathcal{A}_m + \mathcal{A}_{\sigma 2}) N_2 i_2 + \mathcal{A}_m N_1 i_1$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_m + \mathcal{A}_{\sigma 1} & \mathcal{A}_m \\ \mathcal{A}_m & \mathcal{A}_m + \mathcal{A}_{\sigma 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

bzw.

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{A} \mathbf{N} \mathbf{i}$$

mit den Vektoren und Matrizen

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_m + \mathcal{A}_{\sigma 1} & \mathcal{A}_m \\ \mathcal{A}_m & \mathcal{A}_m + \mathcal{A}_{\sigma 2} \end{bmatrix} \quad ,$$

wobei

$$\mathcal{A}_m = \frac{1}{R_m} \quad , \quad \mathcal{A}_{\sigma 1} = \frac{1}{R_{\sigma 1}} \quad , \quad \mathcal{A}_{\sigma 2} = \frac{1}{R_{\sigma 2}}$$

die magnetischen Leitwerte der Haupt- und Streuwege sind. Die magnetische Leitwertmatrix ist symmetrisch,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \quad .$$

Übergang auf mehrfach verkettete Flüsse:

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{N} \mathbf{A} \mathbf{N} \mathbf{i} = \mathbf{L} \mathbf{i}$$

Die Matrix

$$\mathbf{L} = \mathbf{N} \mathbf{A} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix},$$

heißt *Induktivitätsmatrix*. Üblicherweise verwendet man statt der Matrixindizierung der einzelnen Elemente  $L_{jk}$  folgende alternative Bezeichnungen:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & L_m \\ L_m & L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{m1} + L_{\sigma 1} & L_m \\ L_m & L_{m2} + L_{\sigma 2} \end{bmatrix}$$

Die Induktivitätsmatrix ist im Übrigen symmetrisch.

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^T, \quad \text{bzw.} \quad L_{12} = L_{21} = L_m$$

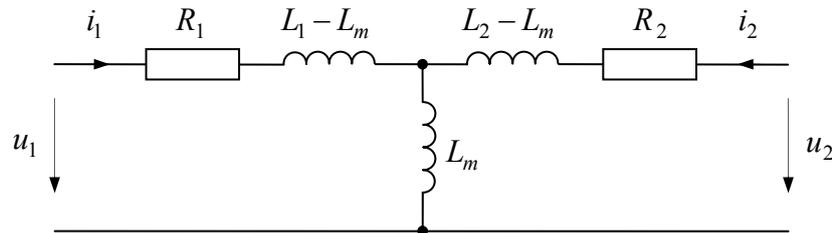
Die Elemente werden wie folgt bezeichnet bzw. bestimmt:

Hauptinduktivität oder Gegeninduktivität	$L_m = N_1 N_2 A_m$
Primäre Hauptinduktivität	$L_{m1} = N_1^2 A_m$
Sekundäre Hauptinduktivität	$L_{m2} = N_2^2 A_m$
Primäre Streuinduktivität	$L_{\sigma 1} = N_1^2 A_{\sigma 1}$
Sekundäre Streuinduktivität	$L_{\sigma 2} = N_2^2 A_{\sigma 2}$
Primäre Selbstinduktivität	$L_1 = L_{m1} + L_{\sigma 1} = N_1^2 (A_m + A_{\sigma 1})$
Sekundäre Selbstinduktivität	$L_2 = L_{m2} + L_{\sigma 2} = N_2^2 (A_m + A_{\sigma 2})$

Die *Streuung* oder *Streuziffer* ist definiert als

$$\sigma = \frac{L_1 L_2 - L_m^2}{L_1 L_2} = 1 - \frac{L_m^2}{L_1 L_2} = 1 - \frac{L_{m1} L_{m2}}{L_1 L_2}$$

## 6.2 Dynamische Gleichungen und elektrisches Ersatzschaltbild



T-Ersatzschaltbild des Transformators  
unter Berücksichtigung der Wicklungswiderstände

Man beachte, dass die in den Ersatzschaltbildern auftretenden Induktivitäten  $L_{11} - L_m$  und  $L_{22} - L_m$  durchaus negative Werte annehmen können.

Dynamische Gleichungen:

$$\dot{\psi}_1 = u_1 - R_1 i_1$$

$$\dot{\psi}_2 = u_2 - R_2 i_2$$

$$\psi_1 = L_1 i_1 + L_m i_2$$

$$\psi_2 = L_2 i_2 + L_m i_1$$

bzw.

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \dot{i}_1 + L_m \dot{i}_2$$

$$u_2 = R_2 i_2 + L_2 \dot{i}_2 + L_m \dot{i}_1$$

Daraus folgende die stationären Gleichungen, hier dargestellt in Form von Effektivwertzeigern:

$$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j\omega(L_1 \underline{I}_1 + L_m \underline{I}_2)$$

$$\underline{U}_2 = R_2 \underline{I}_2 + j\omega(L_2 \underline{I}_2 + L_m \underline{I}_1)$$

### 6.3 Transformation der Sekundärgrößen

Einführung transformierter Größen:

$$u'_2 = \alpha u_2, \quad i'_2 = \frac{1}{\alpha} i_2$$

Umformung der primärseitigen Spannungsgleichung:

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + L_1 \dot{i}_1 + L_m \dot{i}_2 \\ &= R_1 i_1 + L_1 \dot{i}_1 + \alpha L_m \dot{i}'_2 \\ &= R_1 i_1 + L_1 \dot{i}_1 + L'_m \dot{i}'_2 \end{aligned}$$

mit

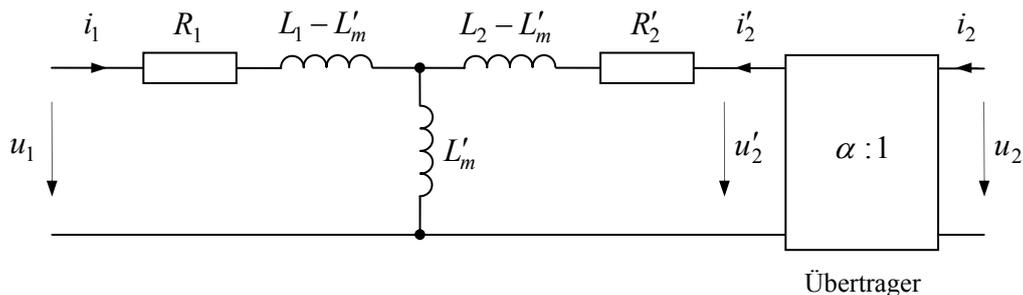
$$L'_m = \alpha L_m$$

Multiplikation der sekundärseitigen Spannungsgleichung mit  $\alpha$  liefert:

$$\begin{aligned} \alpha u_2 &= \alpha R_2 i_2 + \alpha L_2 \dot{i}_2 + \alpha L_m \dot{i}_1 \\ u'_2 &= \alpha^2 R_2 i'_2 + \alpha^2 L_2 \dot{i}'_2 + \alpha L_m \dot{i}_1 \\ &= R'_2 i'_2 + L'_2 \dot{i}'_2 + L'_m \dot{i}_1 \end{aligned}$$

mit

$$L'_2 = \alpha^2 L_2, \quad R'_2 = \alpha^2 R_2$$



T-Ersatzschaltbild des Transformators  
mit transformierten Sekundärgrößen

In gleicher Weise können auch die Primärgrößen transformiert werden, was hier nicht dargestellt ist.

Verschiedene Anwendungen dieser Transformation sind in den folgenden Abschnitten beschrieben:

### 6.3.1 Transformation der sekundärseitigen Größen auf die Primärseite im Verhältnis der Windungszahlen

$$\alpha = \frac{N_1}{N_2} :$$

Es ergibt sich insbesondere:

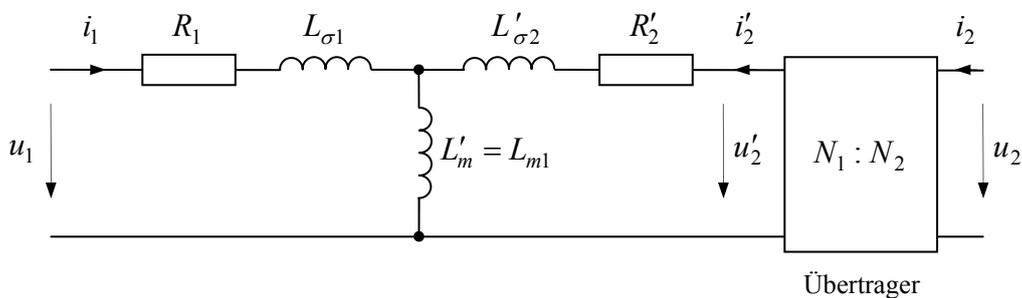
$$L'_m = \frac{N_1}{N_2} L_m = L_{m1}$$

$$L'_2 = \frac{N_1^2}{N_2^2} L_2$$

und

$$L_1 - L'_m = L_{\sigma 1}$$

$$L'_2 - L'_m = \frac{N_1^2}{N_2^2} L_{\sigma 2} = L'_{\sigma 2}$$



T-Ersatzschaltbild des Transformators  
Sekundärgrößen auf die Primärseite transformiert

Anders als im allgemeinen Ersatzschaltbild sind die hier auftretenden Streuinduktivitäten  $L_{\sigma 1}$ ,  $L'_{\sigma 2}$  nicht-negative Größen.

### 6.3.2 Transformation auf eine primärseitig konzentrierte Streuung

Die Transformation kann so angewendet werden, dass die Streuinduktivität der Sekundärseite verschwindet:

$$L'_2 - L'_m = \alpha^2 L_2 - \alpha L_m = 0$$

Daraus folgt

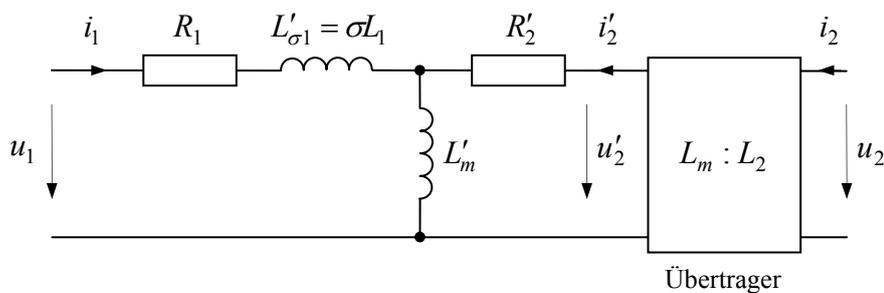
$$\alpha = \frac{L_m}{L_2}$$

sowie

$$L'_{\sigma 1} = L_1 - L'_m = L_1 - \frac{L_m^2}{L_2} = L_1 \left( 1 - \frac{L_m^2}{L_1 L_2} \right) = \sigma L_1$$

$$L'_m = \frac{L_m^2}{L_2}$$

$$R'_2 = \frac{L_m^2}{L_2^2} R_2$$



Ersatzschaltbild des Transformators  
mit primärseitig konzentrierter Streuung

### 6.3.3 Transformation auf eine sekundärseitig konzentrierte Streuung

Die Transformation kann so angewendet werden, dass die Streuinduktivität der Primärseite verschwindet:

$$L_1 - L'_m = L_1 - \alpha L_m = 0$$

Daraus folgt

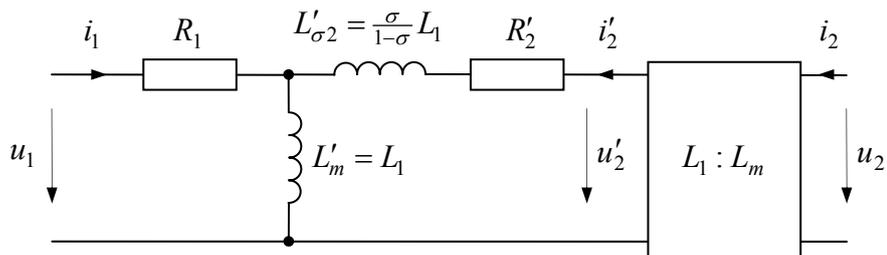
$$\alpha = \frac{L_1}{L_m}$$

sowie

$$L'_m = L_1$$

$$L'_{\sigma 2} = L_2 - L'_m = \frac{L_1^2}{L_m^2} L_2 - L_1 = L_1 \left( \frac{L_1 L_2}{L_m^2} - 1 \right) = \frac{\sigma}{1 - \sigma} L_1$$

$$R'_2 = \frac{L_1^2}{L_m^2} R_2$$

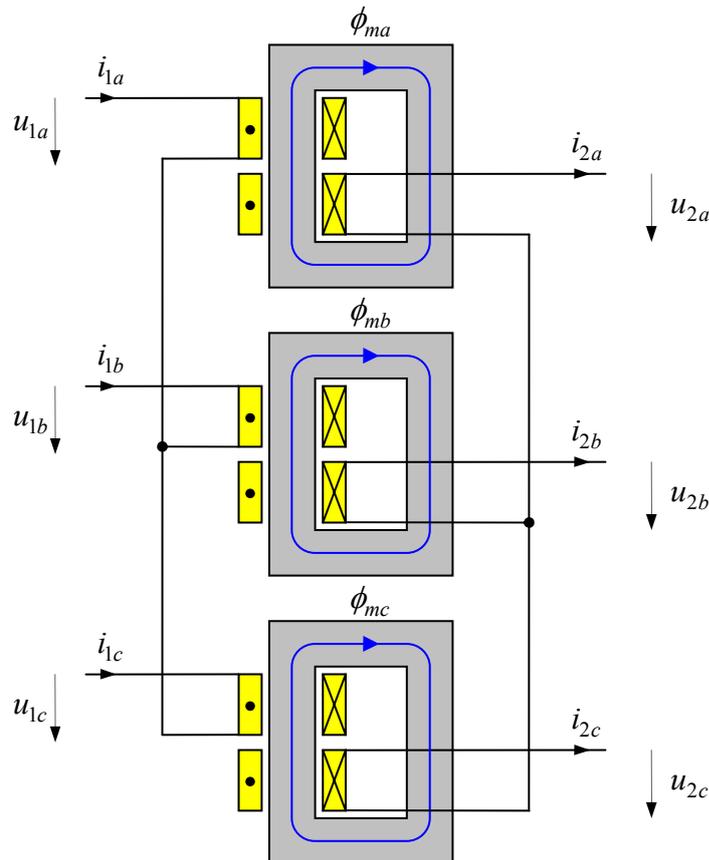


Ersatzschaltbild des Transformators  
mit sekundärseitig konzentrierter Streuung  
( $\Gamma$ -Ersatzschaltbild)

## 7 Drehstromtransformatoren

### 7.1 Darstellung mit Wechselstromtransformatoren

Einen Drehstromtransformator kann man sich funktionell zunächst aus drei Wechselstromtransformatoren zusammengesetzt denken:



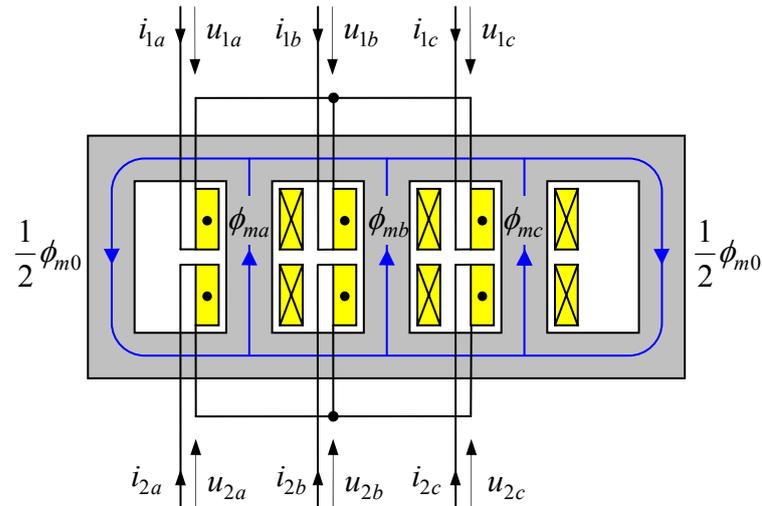
Drei Wechselstromtransformatoren in Stern-Stern-Schaltung

### 7.2 Fünf- und Drei-Schenkel-Drehstromtransformator

Die einzelnen Wechselstromtransformatoren können vorteilhafterweise konstruktiv zusammengefasst werden. Die Transformatoren teilen sich dabei einen gemeinsamen magnetischen Rückschluss über einen 4. bzw. 5. wicklungsfreien Schenkel. Diese freien Schenkel führen den Gesamtfluss

$$\phi_{m0}(t) = \phi_{ma}(t) + \phi_{mb}(t) + \phi_{mc}(t)$$

Dadurch beeinflussen sich zwar die Einzeltransformatoren, diese Verkopplung ist aber sehr gering, da der magnetische Spannungsabfall entlang der freien Schenkel klein ist.



Drehstromtransformator mit fünf Schenkeln  
in Stern-Stern-Schaltung

Sind Primär- und Sekundärseite des Drehstromtransformators als Sternschaltung ausgeführt,

$$i_{1a}(t) + i_{1b}(t) + i_{1c}(t) = 0, \quad i_{2a}(t) + i_{2b}(t) + i_{2c}(t) = 0,$$

resultiert unter der Voraussetzung, dass alle drei Hauptflüsse der Einzeltransformatoren durch eine gleiche und konstante Reluktanz bzw. magnetische Leitfähigkeit  $\Lambda_m$  beschreiben werden,

$$\phi_{ma} = \Lambda_m (N_1 i_{1a} + N_2 i_{2a})$$

$$\phi_{mb} = \Lambda_m (N_1 i_{1b} + N_2 i_{2b})$$

$$\phi_{mc} = \Lambda_m (N_1 i_{1c} + N_2 i_{2c})$$

dass die Flusssumme Null ist,

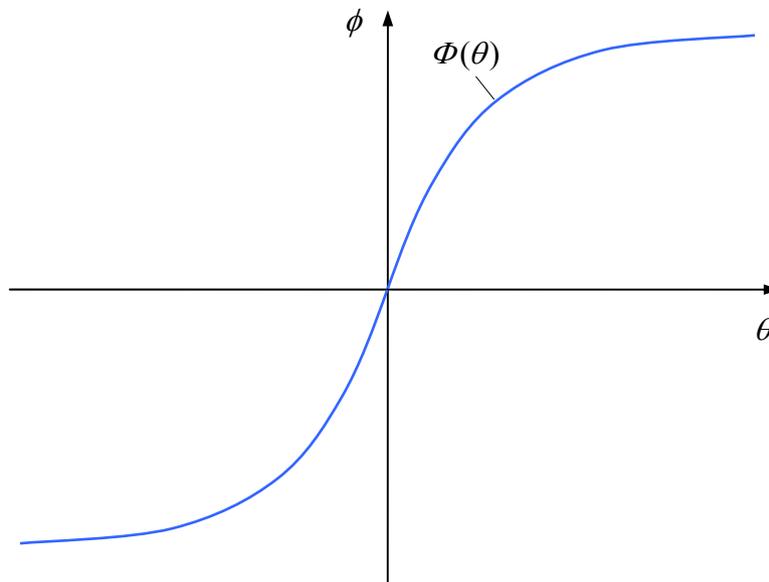
$$\phi_{m0} = \phi_{ma} + \phi_{mb} + \phi_{mc} = \Lambda_m N_1 (i_{1a} + i_{1b} + i_{1c}) + \Lambda_m N_2 (i_{2a} + i_{2b} + i_{2c}) = 0.$$

Das bedeutet, dass auf den magnetischen Rückschluss über freie Schenkel verzichtet werden kann, da diese keinen magnetischen Fluss führen müssen, was zum dreischenkigen Drehstromtransformator führt. Allerdings ist diese Annahme in der Praxis nicht exakt erfüllt: Die Schenkel haben nicht exakt gleiche magnetische Widerstände und somit die gleiche Hauptinduktivität, insbesondere weicht aus konstruktiven Gründen der mittlere leicht von den äußeren ab. Außerdem ist aufgrund der magnetischen Sättigung die Hauptinduktivität nicht konstant, sondern die Flüsse der einzelnen Schenkel ergeben sich über die nichtlineare Magnetisierungskennlinie  $\Phi(\theta)$ :

$$\phi_{ma} = \Phi(N_1 i_{1a} + N_2 i_{2a})$$

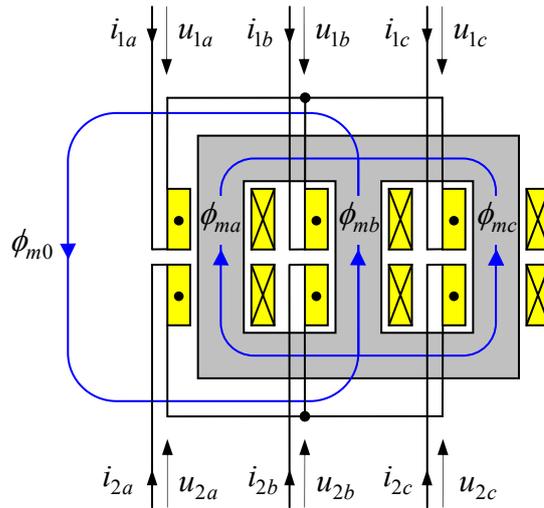
$$\phi_{mb} = \Phi(N_1 i_{1b} + N_2 i_{2b})$$

$$\phi_{mc} = \Phi(N_1 i_{1c} + N_2 i_{2c})$$



Magnetisierungskennlinie

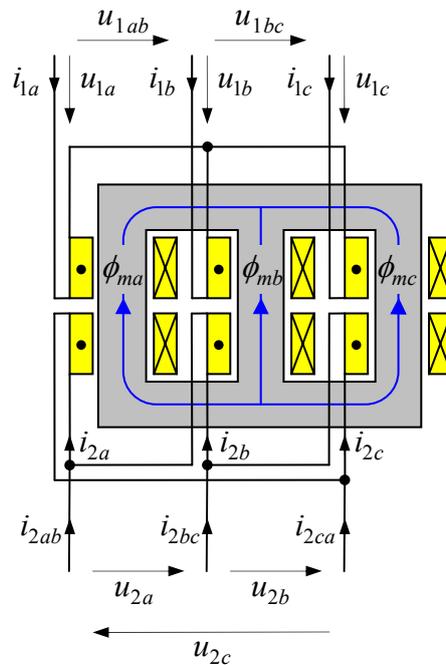
Bei einer solchen nichtlinearen Abhängigkeit folgt aus der Sternpunktbedingung der Ströme nun nicht mehr, dass auch die Summe der Flüsse exakt Null ist. Dieser Nullsystemfluss  $\phi_{m0}$  müsste sich dann über einen Luftweg schließen (s. Bild), da kein Weg durch das Kernmaterial möglich ist. Dies ist allerdings unerwünscht, weil dadurch ein äußeres Streufeld entsteht, welches andere elektrotechnische Komponenten stören kann oder sich über den Kessel eines großen ölgekühlten Transformators schließt, in welchem dadurch ggf. unerwünschte Wirbelströme induziert werden.



Drehstromtransformator mit drei Schenkeln  
in Stern-Stern-Schaltung

### 7.3 Stern-Dreieck-Schaltung

Der Nullsystemfluss  $\phi_{m0}$  kann jedoch durch einen Nullsystemstrom  $i_0$  ausgeglichen werden. Dazu wird entweder die Primär oder die Sekundärwicklung nicht als Stern-, sondern als Dreieckschaltung ausgeführt.



Drehstromtransformator mit drei Schenkeln  
in Stern-Dreieck-Schaltung

Die Umrechnung zwischen Wicklungsströmen  $i_{2a}, i_{2b}, i_{2c}$  und Außenleiterströmen  $i_{2ab}, i_{2bc}, i_{2ca}$  der Dreieckschaltung ergibt<sup>3</sup>:

$$i_{ab} = i_a - i_b, \quad i_{bc} = i_b - i_c, \quad i_{ca} = i_c - i_a$$

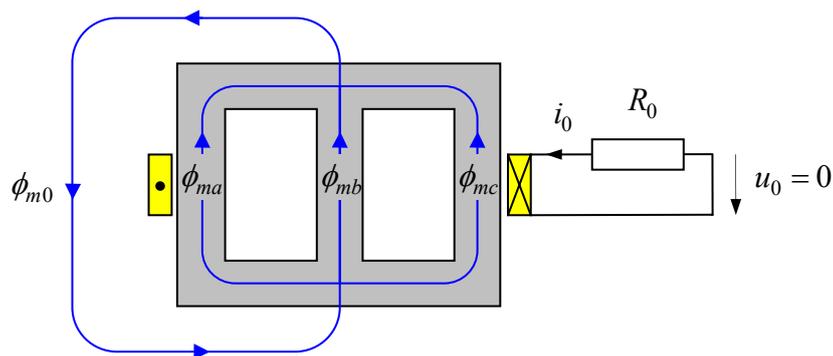
Die Auflösung nach den Wicklungsströmen ergibt

$$i_a = i_0 + \frac{1}{3}(i_{ab} - i_{ca}), \quad i_b = i_0 + \frac{1}{3}(i_{bc} - i_{ab}), \quad i_c = i_0 + \frac{1}{3}(i_{ca} - i_{bc}),$$

wobei

$$i_0 = \frac{1}{3}(i_a + i_b + i_c)$$

Die Dreiecksschaltung kann dann – anders als eine Sternschaltung – einen Kreisstrom  $i_0$  führen, welcher sich in den Außenleiterströmen nicht bemerkbar macht. Dieser verändert aber die Magnetisierung aller drei Schenkel derart, dass der Nullsystemfluss unterdrückt wird. Für das Verhalten kann ein vereinfachtes Ersatzmodell betrachtet werden:



Ersatzmodell für das Nullsystem

Der wirksame Ersatzwiderstand ist der dreifache Wicklungswiderstand:

$$R_0 = 3R$$

Mit kleinem Wicklungswiderstand gilt näherungsweise

$$\dot{\psi}_{m0} = N\dot{\phi}_{m0} = 0$$

Der Kreisstrom  $i_0$  ist eine freie Größe im Transformator, die von den Außenleiterströmen nicht beeinflusst wird. Bei sekundärseitiger Dreieckschaltung stellt sich  $i_0$  so ein, dass

<sup>3</sup> Der Index für die Sekundärseite wird im Folgenden im Hinblick darauf weggelassen, dass die Dreiecksschaltung auch primärseitig ausgeführt werden könnte; die Beziehungen gelten also sowohl für Index „1“ oder „2“

$$i_a = i_0 + \frac{1}{3}(i_{ab} - i_{ca}), \quad i_b = i_0 + \frac{1}{3}(i_{bc} - i_{ab}), \quad i_c = i_0 + \frac{1}{3}(i_{ca} - i_{bc}),$$

$$\begin{aligned} \phi_{m0} = \phi_{ma} + \phi_{mb} + \phi_{mc} &= \Phi(N_1 i_{1a} + N_2 [i_{20} + \frac{1}{3}(i_{2ab} - i_{2ca})]) \\ &+ \Phi(N_1 i_{1b} + N_2 [i_{20} + \frac{1}{3}(i_{2bc} - i_{2ab})]) \\ &+ \Phi(N_1 i_{1c} + N_2 [i_{20} + \frac{1}{3}(i_{2ca} - i_{2bc})]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bei Speisung eines Transformators mit einem symmetrischen Drehspannungssystem zeigt der Kreisstrom  $i_0$  hauptsächlich eine 3. Harmonische. Im Übrigen stellt sich auf der Sternseite des Transformators durch die nichtlineare Magnetisierung eine Sternpunktverlagerung ein, d.h. eine Potentialverschiebung des Sternpunkts, die von einem symmetrischen linearen Drehstromsystem unbekannt ist. Da der Sternpunkt üblicherweise nicht herausgeführt wird, bleibt die Sternpunktverlagerung wie der Kreisstrom nach außen unbemerkt und ohne Wirkung.

#### 7.4 Ersatzschaltbilder des Drehstrom-Transformators

Beim symmetrischen Betrieb eines Drehstromsystems, d. h. wenn alle Phasenströme bzw. Spannungen gleiche Effektivwerte bei jeweils  $120^\circ$  Phasenverschiebung zeigen, können alle drei Phasen stellvertretend nur durch das Ersatzschaltbild einer einzelnen Phase repräsentiert werden. Dies gilt auch für den Drehstromtransformator. Alle Ersatzschaltbilder des Wechselstromtransformators können direkt für den symmetrischen Betrieb des Drehstromtransformators verwendet werden.

#### 7.5 Bezeichnungen und Schaltzeichen

Dreiecksschaltung	D, d
Sternschaltung	Y, y
Zickzackschaltung	Z, z

Die Hochspannungsseite wird mit großen Buchstaben, die Niederspannungsseite mit kleinen Buchstaben gekennzeichnet

[zu ergänzen, auch die Bedeutung der Ziffern in der Schaltgruppenbezeichnung zur Kennzeichnung der Phasendrehung]

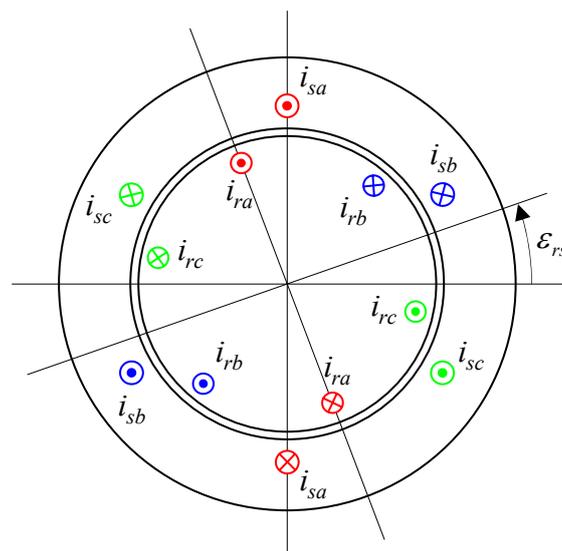
## 8 Asynchronmotoren

### 8.1 Aufbau

Drehstrom-Asynchronmotoren können von ihrem Aufbau wie ein Drehstromtransformator verstanden werden, wobei allerdings keine ausgeprägten Schenkel vorhanden sind. Stator und Rotor sind mit einem Drehstromwicklungssystem versehen.

Es gibt zwei grundsätzlich unterschiedliche Ausführungen von Asynchronmotoren:

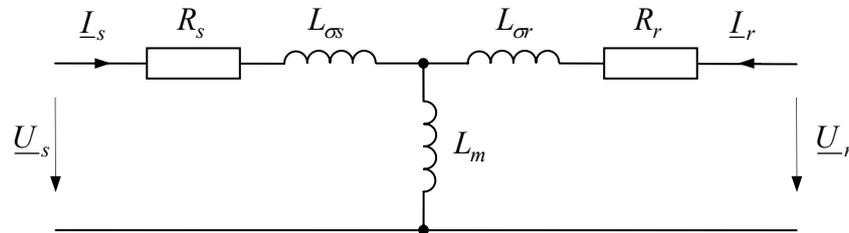
- Doppelt-gespeiste Asynchronmaschine**  
 Das Wicklungssystem des Rotors wird über Schleifringe herausgeführt. Dieser Typ findet sich beispielsweise in Windkraftanlagen oder anderen größeren Energiewandlungsanlagen. Die Wicklungen des Stators und des Rotors werden üblicherweise im Stern oder Dreieck geschaltet.
- Kurzschlussläufer-Asynchronmaschine**  
 Das Wicklungssystem des Rotors wird im Kurzschluss betrieben. Die Rotorwicklung wird gar nicht herausgeführt, sondern im Rotor kurzgeschlossen. Diese Wicklung wird üblicherweise auch nicht im herkömmlichen Sinn als Spulen gewickelt, sondern es werden Stäbe aus Kupfer in die Nuten des Rotors getrieben, die an den Stirnflächen des Rotors mittels Kurzschlussringen kurzgeschlossen werden. Man bezeichnet dies als Kurzschlusskäfig, engl. squirrel cage. Dies ist der am häufigsten anzutreffende Typ. Insbesondere bei kleineren Motoren ist die Verwendung von Aluminiumguss an Stelle von Kupfer sehr verbreitet. Da dieser Motortyp keine anfälligen Schleifringe benötigt, ist er sehr robust und weitgehend wartungsfrei.



Prinzipieller Aufbau eines Asynchronmotors

## 8.2 Modellierung und Ersatzschaltbild

Der festgebremste, stillstehende Asynchronmotor kann wie ein Drehstromtransformator durch das entsprechende Ersatzschaltbild beschrieben werden. Zur Beschreibung des stationären Zustands werden Effektivwertzeiger verwendet:



Ersatzschaltbild des festgebremsten Asynchronmotors

Es wird angenommen, dass der Motor mit Drehspannungen der Frequenz  $\omega_s$  gespeist wird. Die Gleichungen für die Ständer- und Läufermasche liefern dann für den stillstehenden Motor:

$$\underline{U}_s = R_s \underline{I}_s + j\omega_s L_{\sigma s} \underline{I}_s + j\omega_s L_m (\underline{I}_s + \underline{I}_r)$$

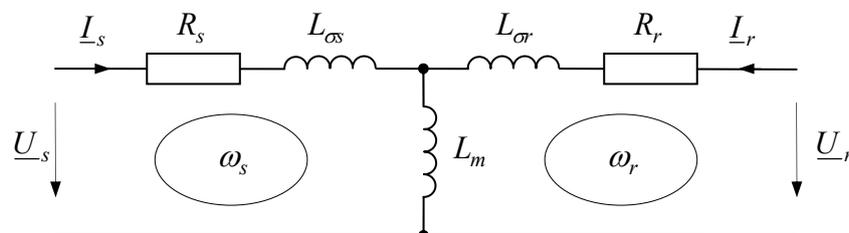
$$\underline{U}_r = R_r \underline{I}_r + j\omega_s L_{\sigma r} \underline{I}_r + j\omega_s L_m (\underline{I}_s + \underline{I}_r)$$

Nun wird der drehende Motor betrachtet: Der Ständer werde weiterhin mit einer Frequenz  $\omega_s$  gespeist. Dreht sich der Rotor mit einer Kreisfrequenz

$$\omega_{rs} = \dot{\epsilon}_{rs} ,$$

so ist die Frequenz des Rotors im stationären Zustand nicht mehr  $\omega_s$ , sondern

$$\omega_r = \omega_s - \omega_{rs} .$$



Stationäres Ersatzschaltbild des Asynchronmotors, wobei im Stator- und Rotorkreis unterschiedliche Frequenzen angedeutet sind

Die Frequenz  $\omega_s$  wird *Statorfrequenz*,  $\omega_r$  *Rotorfrequenz* genannt. Da im Rotorkreis also die Frequenz  $\omega_r$  maßgeblich ist, lauten die Spannungsgleichungen für den rotierenden Motor folglich

$$\underline{U}_s = R_s \underline{I}_s + j\omega_s L_{\sigma s} \underline{I}_s + j\omega_s L_m (\underline{I}_s + \underline{I}_r),$$

$$\underline{U}_r = R_r \underline{I}_r + j\omega_r L_{\sigma r} \underline{I}_r + j\omega_r L_m (\underline{I}_s + \underline{I}_r).$$

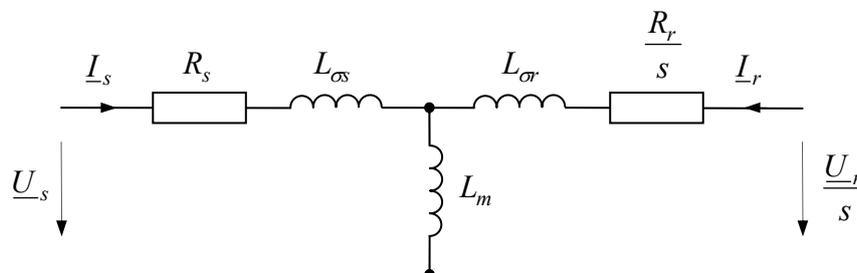
Um für den rotierenden Motor ein Ersatzschaltbild herzuleiten, wird die Rotorspannungsgleichung mit dem Faktor

$$s = \frac{\omega_r}{\omega_s}$$

multipliziert. Diese Größe heißt *Schlupf*. Es folgt

$$\frac{1}{s} \underline{U}_r = \frac{R_r}{s} \underline{I}_r + j\omega_s L_{\sigma r} \underline{I}_r + j\omega_s L_m (\underline{I}_s + \underline{I}_r)$$

Die Terme für die Spannungsabfälle an den Induktivitäten zeigen nun die gleiche Frequenz wie im Ständerkreis. Wie bei der stationären Wechselspannungsrechnung üblich, kann man nun dazu ein Ersatzschaltbild zeichnen, in dem alle beteiligten Ströme und Spannungen mit dieser Frequenz  $\omega_s$  oszillieren. In diesem Ersatzschaltbild tritt nun aber ein veränderter Rotorwiderstand und eine veränderte Rotorspannung auf:



Stationäres Ersatzschaltbild des rotierenden Asynchronmotors  
in diesem stationären Ersatzschaltbild oszillieren auch die Wechselgrößen  
des Rotorkreises mit der Frequenz  $\omega_s$

### 8.3 Drehmoment

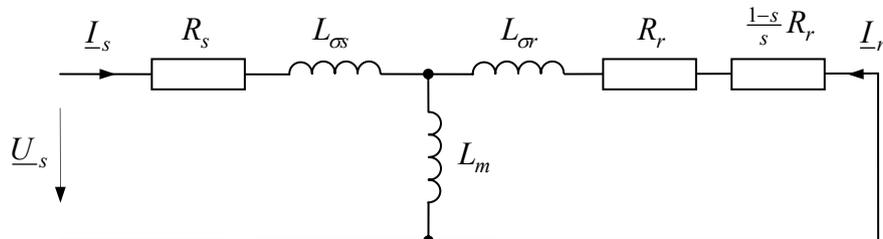
Im Folgenden soll das Drehmoment des *Kurzschluss-Asynchronmotors* bestimmt werden. Für diesen Typ ist

$$\underline{U}_r = 0.$$

Außerdem wird der transformierte Rotorwiderstand in der Form

$$\frac{R_r}{s} = R_r + \frac{1-s}{s} R_r$$

dargestellt.



Stationäres Ersatzschaltbild des rotierenden Asynchronmotors  
mit Kurzschlussläufer

Das Drehmoment wird über die Leistungsbilanz bestimmt. Es muss gelten

$$\dot{E}_{magn} = P_{el} - P_{mech} - P_v$$

Die Energie  $E_{magn}$  ist die in den Induktivitäten gespeicherte Energie. Die zugeführte elektrische Leistung eines Drehstromsystems ist

$$P_{el} = 3 \operatorname{Re} \left[ \underline{U}_s^* \underline{I}_s \right].$$

Die mechanische Leistung ist

$$P_{mech} = \omega_{mech} T.$$

Die hier auftretende mechanische Drehfrequenz  $\omega_{mech}$  ist gleich  $\omega_{rs}$ , sofern der Motor, wie im obigen Prinzipbild skizziert, mit einem einfachen Wicklungssystem ausgestattet ist. Vielfach werden die Motoren jedoch so aufgebaut, dass sich über den Umfang des Motors mehrere Wicklungen desselben Strangs wiederholen. Dies wird durch die sogenannte Polpaarzahl  $p$  angegeben. Für die Betrachtung der elektrischen Vorgänge kann man die Vorstellung eines Motors mit Polpaarzahl  $p=1$  beibehalten; der Zusammenhang zwischen der Frequenz  $\omega_{rs}$  und der tatsächlichen mechanische Drehfrequenz ergibt sich dann nach

$$\omega_{rs} = p \omega_{mech}.$$

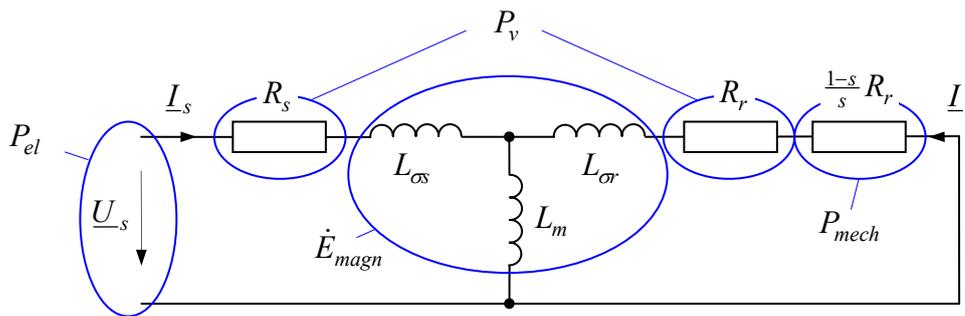
Wird die mechanische Leistung mit Hilfe der Frequenz  $\omega_{rs}$  ausgedrückt, folgt

$$P_{mech} = \frac{1}{p} \omega_{rs} T.$$

Die Verlustleistung ist die in den ohmschen Widerständen umgesetzte Leistung<sup>4</sup>

$$P_v = 3R_s I_s^2 + 3R_r I_r^2.$$

Identifiziert man die bekannten elektrischen Leistungsterme  $P_{el}$ ,  $P_v$  und  $\dot{E}_{magn}$  im elektrischen Ersatzschaltbild (im stationären Betrieb ist  $E_{magn} = const.$ , also  $\dot{E}_{magn} = 0$ ), ergibt sich zwangsläufig die Identifikation der mechanischen Leistung:



Identifikation der Leistungen im Ersatzschaltbild

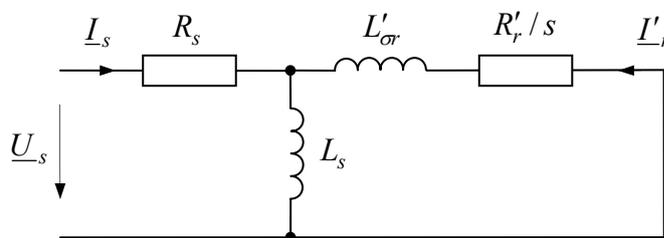
Es folgt

$$P_{mech} = \frac{1}{p} \omega_{rs} T = 3R_r \frac{1-s}{s} I_r^2 = 3R_r \frac{\omega_{rs}}{\omega_r} I_r^2$$

und für das Drehmoment

$$T = 3pR_r \frac{I_r^2}{\omega_r}$$

Für das Folgende ist es einfacher, auf das Modell mit rotorseitig konzentrierter Streuung überzugehen, welches im Kapitel über Transformatoren hergeleitet wurde:



Stationäres Ersatzschaltbild des Kurzschluss-Asynchronmotors mit rotorseitig konzentrierter Streuung

<sup>4</sup> wie üblich bezeichnen Großbuchstaben ohne Unterstrich die Beträge der komplexen Effektivwertzeiger, also reelle Effektivwerte

$$L'_{\sigma r} = \frac{\sigma}{1-\sigma} L_s$$

$$R'_r = \frac{L_s^2}{L_m^2} R_r$$

Wird der Spannungsabfall am Ständerwiderstand vernachlässigt, was dann gerechtfertigt ist, wenn die induktiven Spannungsabfälle bei genügend großer Frequenz überwiegen, erhalten wir für den Rotorstrom

$$\underline{I}'_r = \frac{\underline{U}_s}{j\omega_s L'_{\sigma r} + R'_r / s} = \frac{\underline{U}_s}{\omega_s} \frac{\omega_r}{j\omega_r L'_{\sigma r} + R'_r}$$

sowie für das Drehmoment die sogenannte *Klosssche Formel*

$$T = 3p \frac{U_s^2}{\omega_s^2} \frac{\omega_r R'_r}{(\omega_r L'_{\sigma r})^2 + R_r'^2} = 3p \frac{U_s^2}{\omega_s^2 L'_{\sigma r}} \frac{1}{\frac{\omega_r L'_{\sigma r}}{R'_r} + \frac{R'_r}{\omega_r L'_{\sigma r}}}$$

Bei konstanter Ständerspannung und -frequenz findet sich das Maximum des Drehmoments bei der *Kippfrequenz*

$$\omega_{rk} = \frac{R'_r}{L'_{\sigma r}} = \frac{R_r}{\sigma L_r}$$

bzw. dem *Kippschlupf*

$$s_k = \frac{\omega_{rk}}{\omega_s} = \frac{R_r}{\omega_s \sigma L_r},$$

wie sich durch Extremwertbestimmung ergibt. Das Drehmoment an dieser Stelle wird als *Kipp-Drehmoment* bezeichnet. Es beträgt

$$T_k = \frac{3p}{2L'_{\sigma r}} \frac{U_s^2}{\omega_s^2}$$

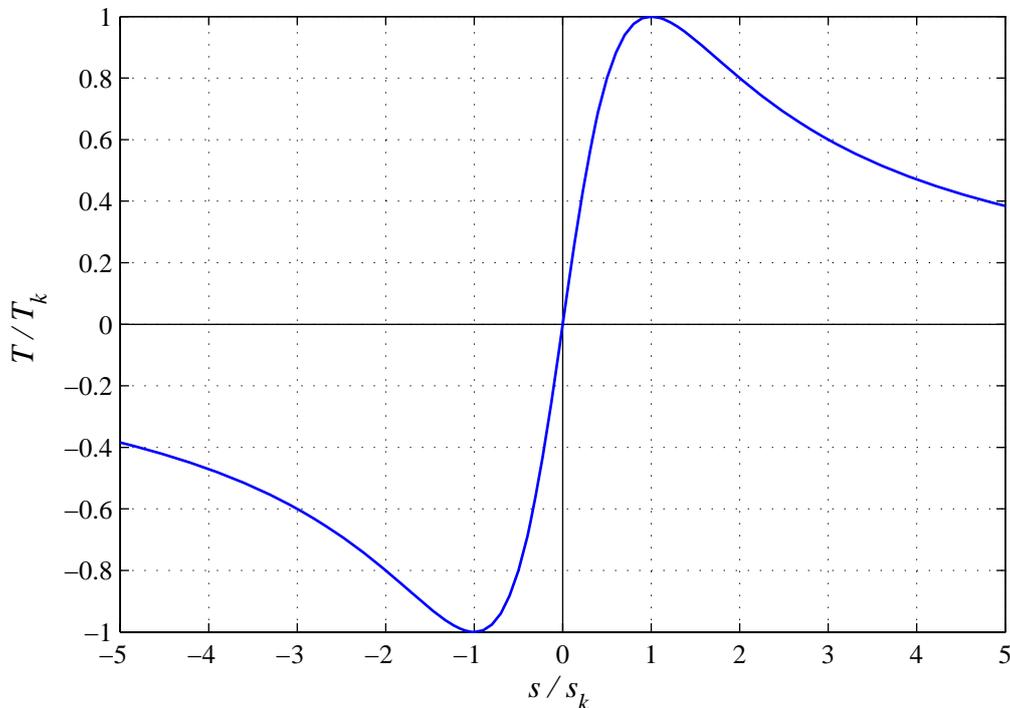
Mit Hilfe der Größen des Kippunktes lässt sich die Klosssche Drehmomentbeziehung in der übersichtlichen Form

$$\frac{T}{T_k} = \frac{2}{\frac{\omega_r}{\omega_{rk}} + \frac{\omega_{rk}}{\omega_r}} = \frac{2}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s}}$$

darstellen. Für kleinen Schlupf  $|s| \ll s_k$  kann das Drehmomentverhalten durch

$$\frac{T}{T_k} \approx 2 \frac{s}{s_k}$$

linear approximiert werden.



Drehmoment in Abhängigkeit des Schlupfes

Stellt man das Drehmoment in Abhängigkeit von der Drehfrequenz  $\omega_{rs}$  dar,

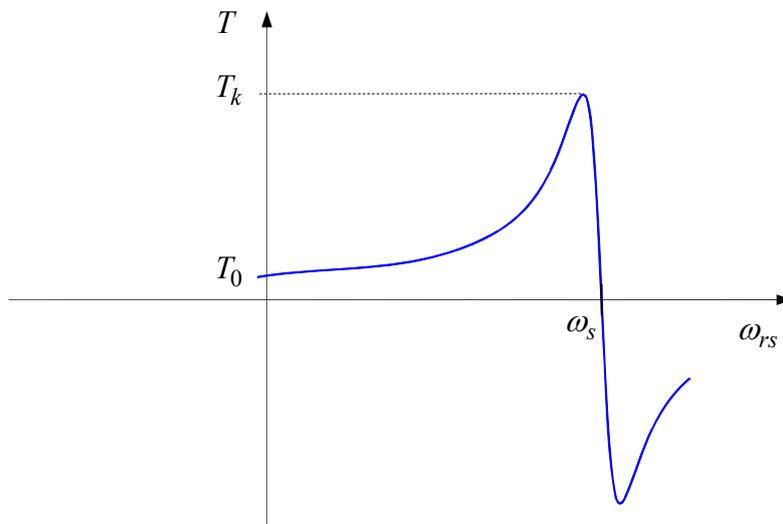
$$\frac{T}{T_k} = \frac{2}{\frac{\omega_s - \omega_{rs}}{\omega_{rk}} + \frac{\omega_{rk}}{\omega_s - \omega_{rs}}},$$

ergibt sich eine entsprechend verschobene Schlupfcharakteristik, wie im folgenden Bild dargestellt ist. Das Drehmoment ist bei synchronem Betrieb  $\omega_{rs} = \omega_s$  Null. Das Anlaufdrehmoment  $T_0$  bestimmt sich zu

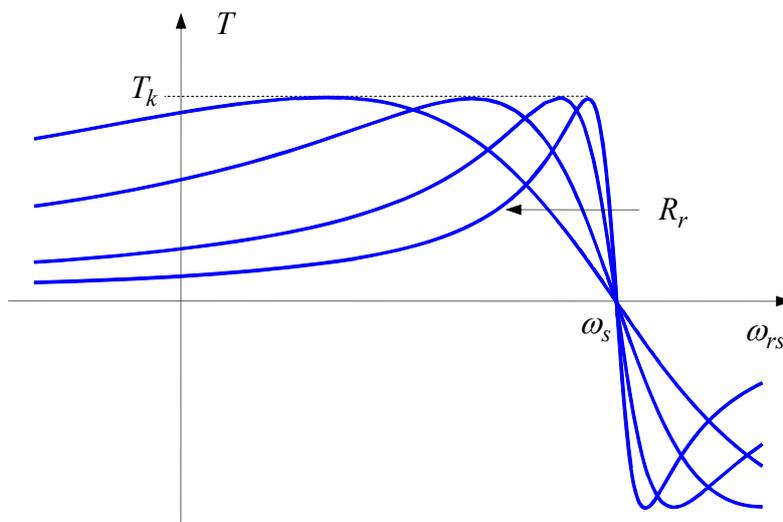
$$\frac{T_0}{T_k} = \frac{2}{\frac{\omega_s}{\omega_{rk}} + \frac{\omega_{rk}}{\omega_s}}$$

Insbesondere bei großem Verhältnis  $\omega_s / \omega_{rk}$  resultiert ein kleines Anlaufdrehmoment. Gilt es, bereits aus dem Stillstand heraus ein großes Lastdrehmoment zu überwinden, sollte demnach ein Motor mit großem Kippschlupf gewählt werden. In der Regel wird dies durch einen großen Rotorwiderstand realisiert, welcher aber wegen zusätzlicher Verluste nachteilig ist. Prinzipiell möglich, aber heute aufgrund hoher Kosten kaum noch anzutreffen ist die

Erhöhung des Rotorwiderstands während des Anlaufs durch externe Widerstände. Das setzt aber einen gewickelten Rotor voraus, dessen Anschlüsse über Schleifringe nach außen geführt werden.



Drehmoment-Drehzahl-Kennlinie des Asynchronmotors



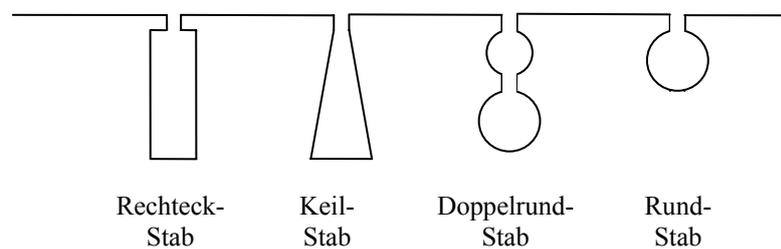
Drehmoment-Drehzahl-Kennlinie für verschiedene Rotorwiderstände

Bezieht man die Rotorverluste  $P_{vr} = R_r I_r^2$  auf die gesamte Luftspaltleistung  $P_l = R_r / s I_r^2$  (das ist die vom Stator in den Luftspalt des Motors abgegebene Leistung,

$$\frac{P_{vr}}{P_l} = s$$

erkennt man, dass ein großer Schlupf bezüglich der Verluste ungünstig ist. Um einen guten Wirkungsgrad zu erreichen, sollte der Motor auf geringen Kippschlupf  $s_k = R_r / \omega_s \sigma L_r$  ausgelegt werden, was einen kleinen Rotorwiderstand erfordert. Dies steht im Zielkonflikt mit einem großen Anlaufdrehmoment.

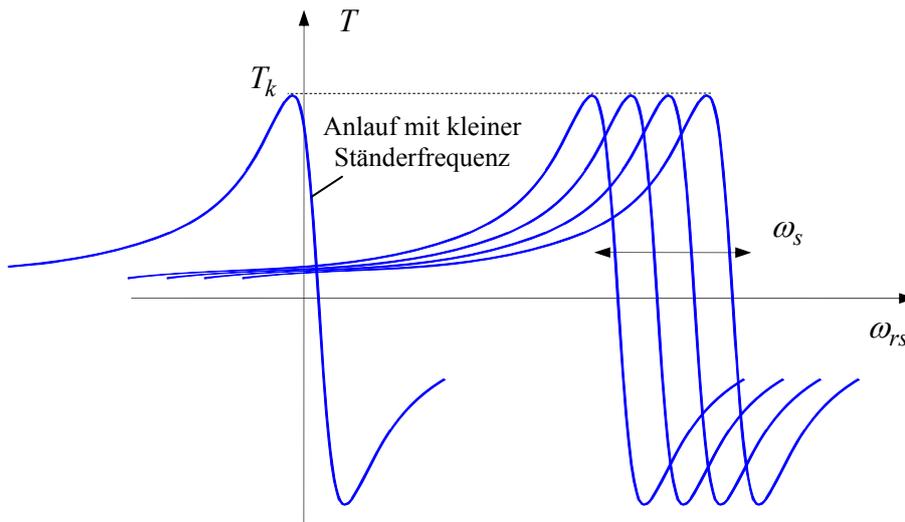
Beim Betrieb von Asynchronmotoren am Netz kann man durch besondere Rotornutkonstruktionen einen Kompromiss erreichen: Durch besonders tiefe Nuten tritt bei großen Rotorfrequenzen, also großem Schlupf wie beim Anlauf, Stromverdrängung auf, so dass der Stromfluss im Wesentlichen durch die oberflächennahe Teile des Leiters geführt wird und der effektive Widerstand zunimmt. Mit kleiner werdendem Schlupf wird die Eindringtiefe größer, der Strom verteilt sich gleichmäßiger und der Widerstand nimmt ab.



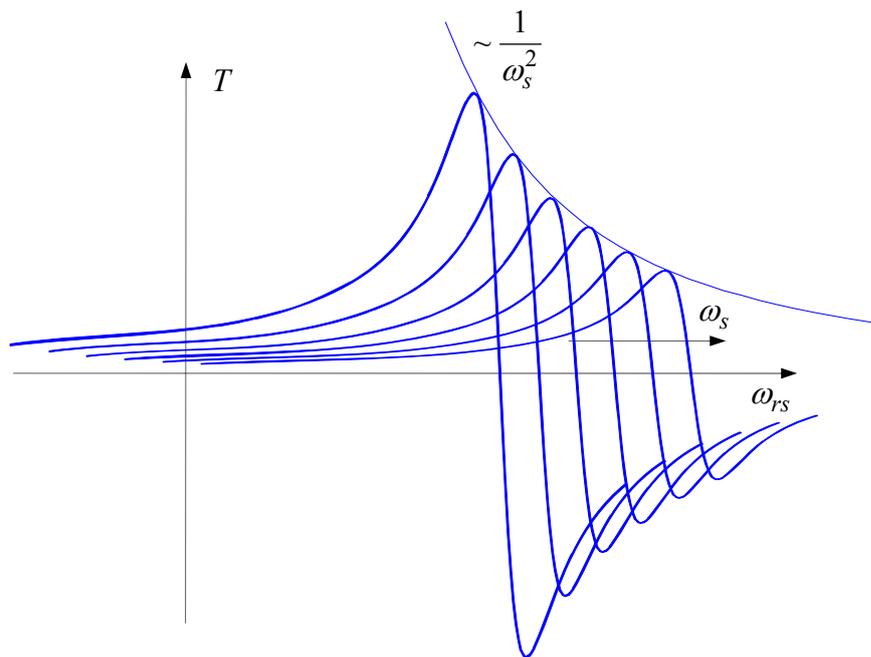
Verschiedene Ausführung von Rotorstäben  
der Rundstab zeigt die geringste Stromverdrängung

Durch Einsatz sogenannter *Frequenzumrichter* ist heute statt des Betriebs am starren Netz die frequenzvariable Speisung von Asynchronmotoren möglich, weshalb das Anlaufverhalten eleganter durch Frequenznachführung und nicht mehr über den Rotorwiderstand bestimmt werden kann. Üblicherweise wird bei Veränderung der Ständerfrequenz  $\omega_s$  die Ständerspannung  $U_s$  proportional verstellt, wie die Vorfaktoren  $U_s / \omega_s$  in den Gleichungen für die Drehmoment- und Stromberechnung nahe legen. Dadurch bleiben Ströme und Drehmoment in ihrem Bemessungsrahmen. Diese Art der Speisung wird als *U/f-Betrieb* bezeichnet.

Mit wachsender Frequenz wird jedoch irgendwann die zulässige bzw. mögliche Spannungsgrenze von Umrichter oder Motor erreicht. Soll die Frequenz über diesen Punkt hinaus erhöht werden, kann die Spannung nur auf dem Maximalwert gehalten werden  $U_s = U_{\max}$ . Die Drehmoment-Drehzahl-Kennlinien beider Betriebsweisen zeigen die folgenden Bilder.



Drehmoment-Drehzahl-Kennlinien für verschiedene Ständerfrequenzen  $\omega_s$  mit  $U_s / \omega_s = const.$

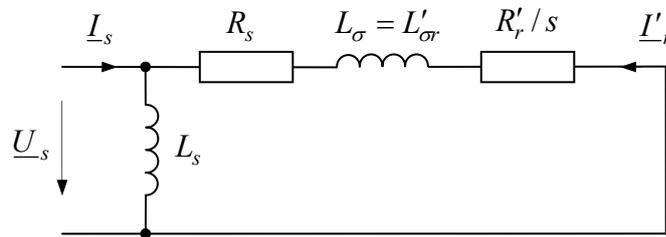


Drehmoment-Drehzahl-Kennlinien für verschiedene Ständerfrequenzen  $\omega_s$  mit  $U_s = const.$

### 8.4 Stromortskurve

Die Hauptinduktivität ist gegenüber den Streuinduktivitäten meist recht groß, so dass der Strom über die Hauptinduktivität gegenüber dem Stromfluss über den äußeren Kreis verhältnismäßig klein ist. Dann kann das Ersatzschaltbild (wobei wieder von dem

Ersatzschaltbild mit rotorseitig konzentrierter Streuung ausgegangen wird), ohne großen Fehler derart modifiziert werden, dass der Ständerwiderstand in den Rotorkreis verschoben wird:



vereinfachtes Stationäres Ersatzschaltbild  
Ständerwiderstand in den Rotorkreis verschoben

Die Admittanz bestimmt sich dann zu

$$\underline{Y}_s = \frac{\underline{I}_s}{\underline{U}_s} = \frac{1}{j\omega_s L_s} + \frac{1}{R_s + R_r/s + j\omega_s L_\sigma}$$

Die Ortskurve der Admittanz  $\underline{Y}_s$  in Abhängigkeit vom Schlupf  $s$  bzw. die Ortskurve des Stromzeigers  $\underline{I}_s$  bei Speisung mit konstanter Spannung  $\underline{U}_s$  und Frequenz  $\omega_s$  muss aus prinzipiellen Gründen ein Kreis sein. Folgende spezielle Betriebspunkte sollen besonders diskutiert werden:

**Leerlauf**, d.h.  $s = 0$ :

Im Leerlauf ist der Motor unbelastet, das Drehmoment ist Null und er dreht mit synchroner Drehzahl, also  $\omega_{rs} = \omega_s$ . Als Leerlaufstrom ergibt sich.

$$\underline{I}_{s0} = \frac{\underline{U}_s}{j\omega_s L_s}$$

**Stillstand**, d.h.  $s = 1$ :

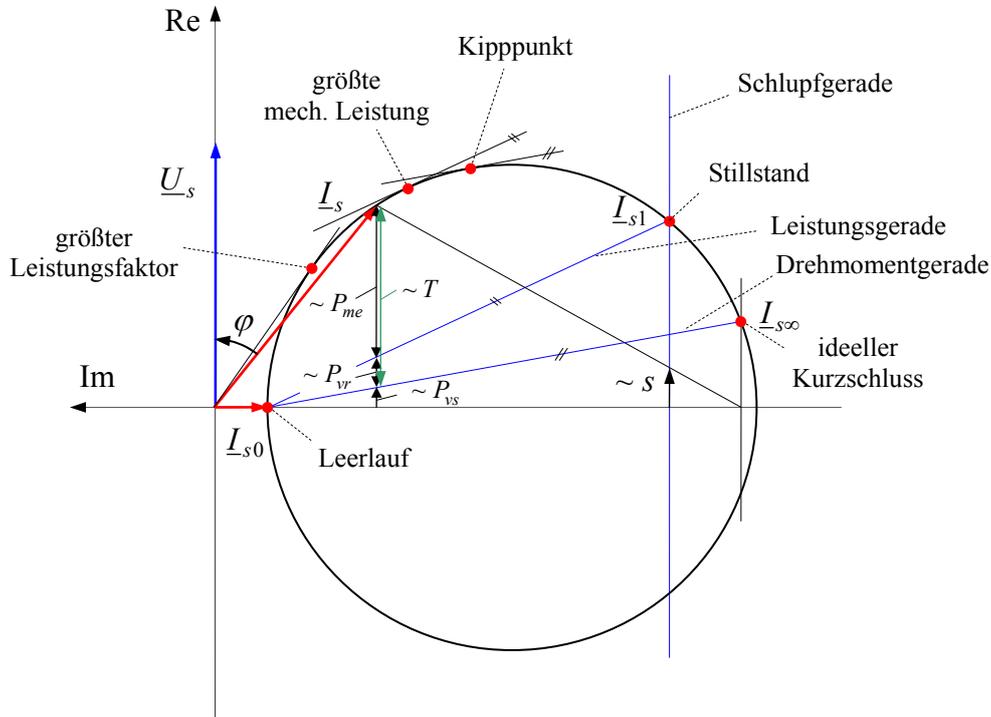
Der Zustand des stillstehenden Motors, sei es, dass er zu Versuchszwecken festgebremst ist, oder gerade aus diesem Zustand heraus anläuft, wird gelegentlich als Kurzschluss bezeichnet. Der Anlaufstrom ist

$$\underline{I}_{s1} = \underline{I}_{s0} + \frac{\underline{U}_s}{R_s + R_r + j\omega_s L_\sigma}$$

**Ideeller Kurzschluss**, d.h.  $s = \infty$

Dieser Begriff bezeichnet den sich unendlich schnell drehenden Motor. Der Punkt dient nur der Charakterisierung der Ortskurve und ist im Betrieb natürlich nicht erreichbar. Der ideale Kurzschlussstrom ist

$$\underline{I}_{s\infty} = \underline{I}_{s0} + \frac{\underline{U}_s}{R_s + j\omega_s L_\sigma}$$



Stromortskurve nach Heyland und Osanna

Aus dem Heylandkreis lassen sich anhand der Drehmomentgeraden, der Leistungsgeraden und der Schlupfgeraden das Drehmoment, die mechanische Leistung, und die Verlustleistungen an Ständer- und Läuferwiderstand konstruieren. Die Konstruktion ergeben sich aus dem obigen Bild, auf den Nachweis dieser Konstruktionen sei hier verzichtet, dazu wird auf die Literatur verwiesen.

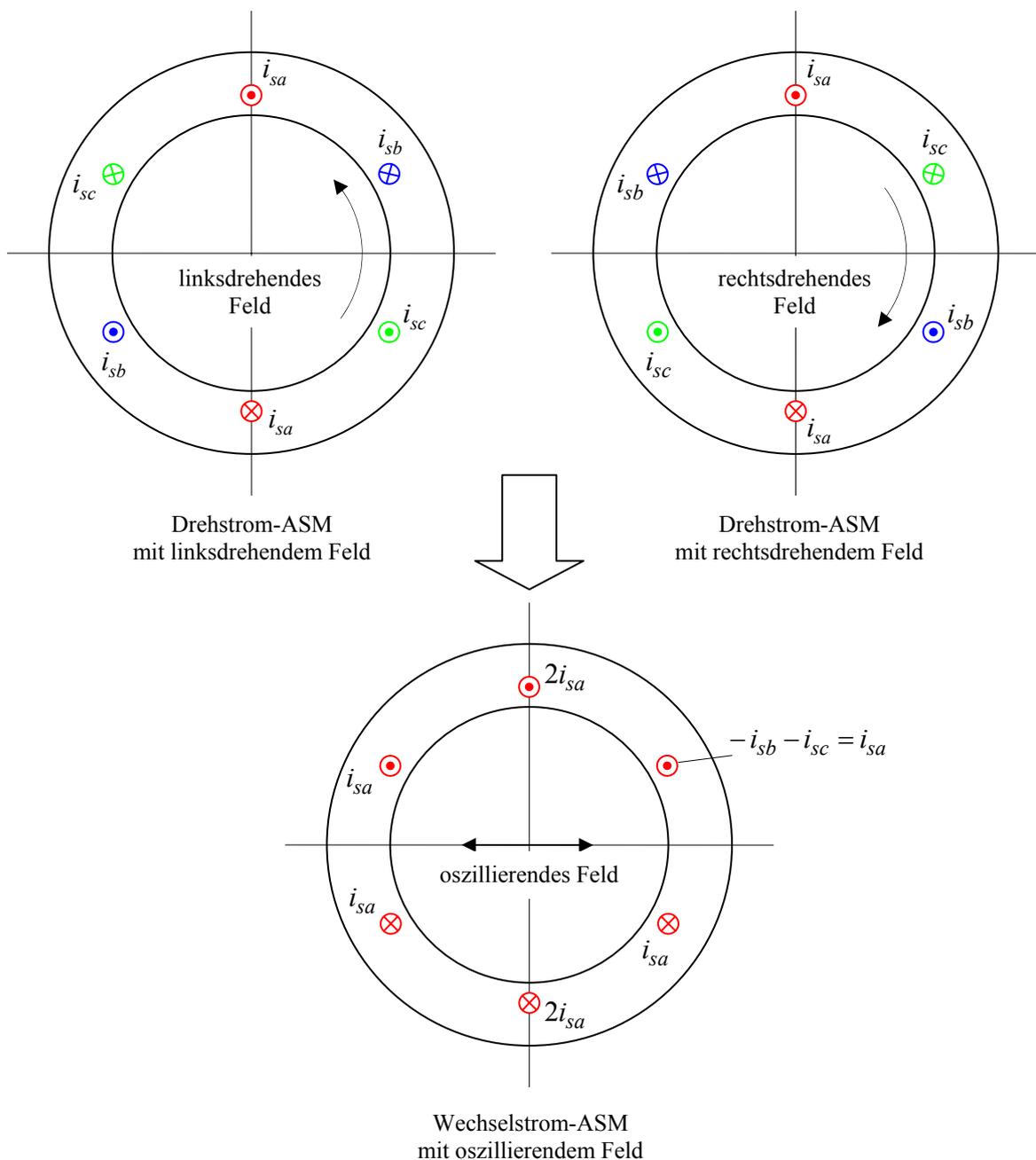
## 8.5 Wechselstrom-Asynchronmotor

Wechselstrom-Asynchronmotoren benötigen zur Speisung keine Dreh-, sondern lediglich Wechselspannung. Man findet sie als Kleinmotoren mit Leistung von einigen Watt bis zu einigen 100W, maximal bis zu wenigen kW z. B. für Haushalts- und Gartengeräte.

Es gibt zwei wichtige Varianten:

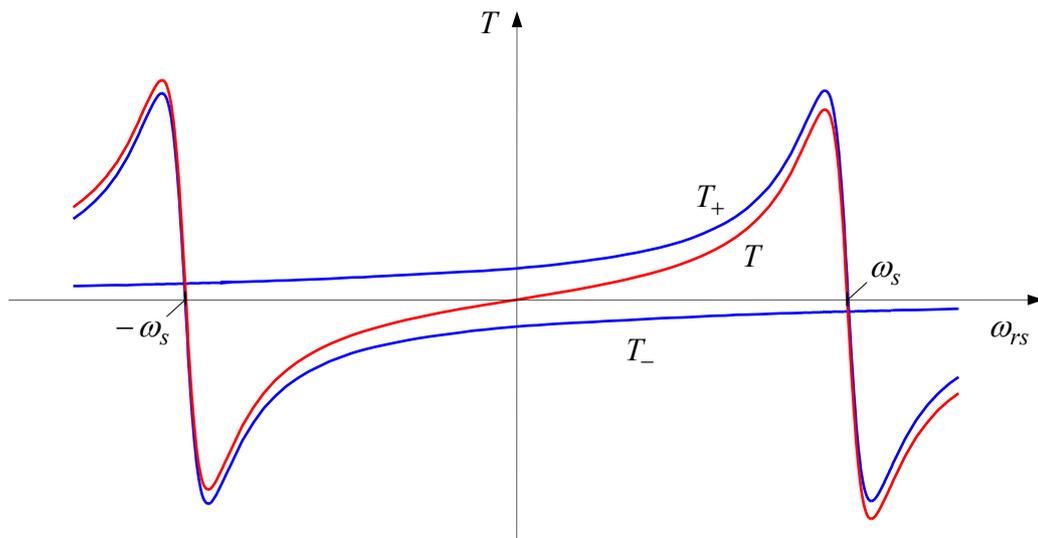
### 8.5.1 Spaltpolmotor

Der Wechselstrom-Asynchronmotor kann zunächst gedanklich durch Superposition zweier Drehstrom-Asynchronmotoren entwickelt werden, die gegensinnig drehende Felder entwickeln. Die Überlagerung beider Statorfelder ergibt das oszillierende Feld eines Wechselstrom-Asynchronmotors.



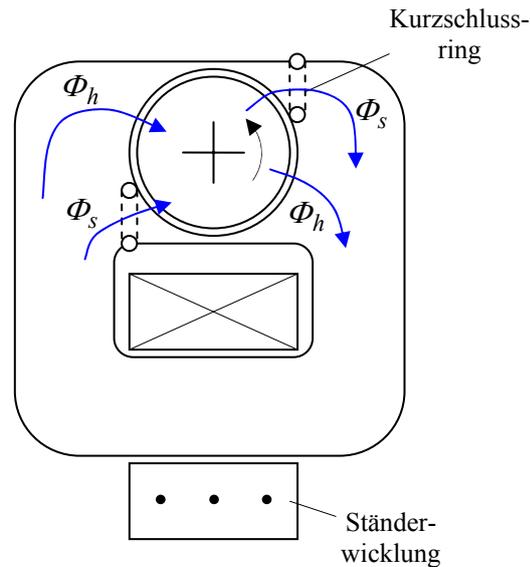
Gedankliche Superposition zweier Drehstrom-Asynchronmotoren mit gegenläufigen Feldern zum Wechselstrom-Asynchronmotor (es sind nur die Statoren dargestellt)

Das Drehmoment-Drehzahl-Verhalten kann näherungsweise durch Superposition der beiden Drehmomentanteile  $T_+$  und  $T_-$  des links- und des rechtsdrehenden Feldes, also für die Ständerfrequenzen  $+\omega_s$  und  $-\omega_s$  gewonnen werden. Da sich diese beiden Drehmomentanteile bei Stillstand genau kompensieren, könnte ein derartiger Motor kein Anlauf-Drehmoment entwickeln. Es gibt auch keine ausgezeichnete Drehrichtung. Der Motor dreht an, wenn er willkürlich in irgendeiner Richtung angestoßen wird.



Drehmoment-Drehzahl-Kennlinie des WS-ASM als Überlagerung der Drehmomentanteile zweier gegensinnig drehender Drehfelder

Um ein Anlauf-Drehmoment zu ermöglichen, wird der sogenannte *Spaltpolmotor* eingesetzt: Bei diesem wird ein Teil des Pols mit einer Kurzschlusswicklung umwickelt. Meist besteht diese Wicklung nur aus einem einzigen Drahting. Diese Kurzschlusswicklung widersetzt sich nach dem Induktionsgesetz einer Änderung des durch sie hindurchgehenden magnetischen Flusses, so dass beim Aufbau des Statorflusses dieser zunächst am Kurzschlussring vorbei geht:  $\Phi_h$ . Mit einer zeitlichen Verzögerung, deren Zeitkonstante sich aus dem Verhältnis von Induktivität und Widerstand der Kurzschlusswicklung bemisst, wird nun auch der Fluss  $\Phi_s$  anwachsen und nach und nach einen größeren Anteil des Gesamtflusses übernehmen. Nimmt der Gesamtfluss im Laufe der sinusförmigen Schwingung dann wieder ab, wird der nun im Kurzschlussring gefangene Flussanteil  $\Phi_s$  gegenüber  $\Phi_h$  erst verzögert abgebaut. Dadurch erhält das ursprünglich nur oszillierende magnetische Feld einen rotierenden Anteil, wodurch ein Anlaufdrehmoment erzeugt und die Drehrichtung bestimmt wird.



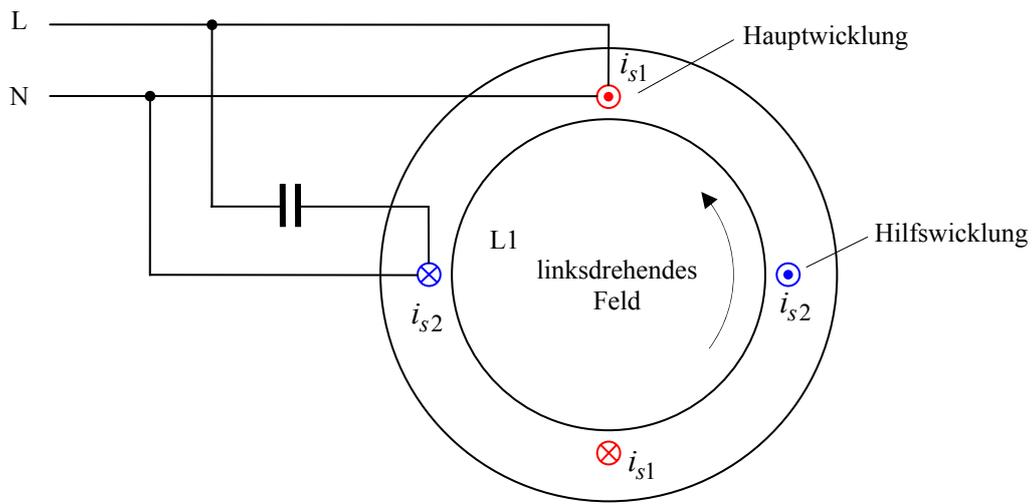
Wechselstrom-Asynchronmotor mit Spaltpol  
(Spaltpolmotor)

### 8.5.2 Kondensatormotor

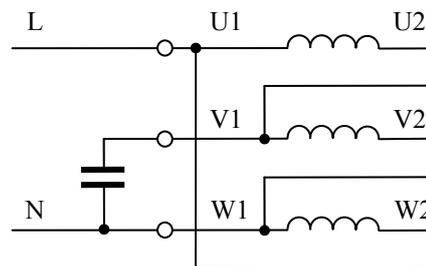
Der Kondensatormotor ist ebenfalls ein WS-Asynchronmotor. Anders als der Spaltpolmotor besitzt jener zwei orthogonal angeordnete Ständerwicklungen, wobei die sogenannte *Hilfswicklung* über einen Kondensator gespeist wird, um einen Phasenvorhalt gegenüber der und somit ein Drehfeld zu erzeugen. Haupt- und Hilfswicklungen sind häufig unterschiedlich bemessen. Ggf. wird die Hilfswicklung nur während des Anlaufs zugeschaltet oder nach dem Anlauf auf einen kleineren Kondensator umgeschaltet.

Es ist auch denkbar, einen normalen Drehstrommotor mit Hilfe eines Kondensators am Wechselspannungsnetz zu betreiben. Dies bezeichnet man als *Steinmetz-Schaltung*.

Da das Drehfeld beim Kondensatormotor über ein *LC*- und nicht wie beim Spaltpolmotor über ein verlustbehaftetes *RL*-Glied aufgebaut wird, besitzt der Kondensatormotor einen besseren Wirkungsgrad. Er findet sich deshalb im oberen Leistungsbereich der Wechselstrommotoren bis etwa 1-2 kW. Bei höheren Leistungen kommen ohnehin ausschließlich Drehstrommotoren zum Einsatz.



Kondensator-Wechselstrom-Asynchronmotor



Steinmetzschtaltung zum Anschluss eines Drehstrommotors an Wechselspannung

## **9 Synchronmotor**

zu ergänzen

## 10 Thermisches Verhalten

Energieumformung und -wandlung mit leistungselektronischen Komponenten und Motoren erreichen teilweise beachtliche Wirkungsgrade von 90-98%. Die entstehenden Verluste müssen dennoch als Wärme abgeführt werden, da sonst Schäden verursacht werden können. Folgende Komponenten antriebstechnischer Systeme sind besonders gegenüber hohen Temperaturen empfindlich:

- Die Sperrschichttemperatur von Silizium-Leistungshalbleitern darf 150°C in der Regel nicht überschreiten. Neue Halbleiter auf Basis von Silizium-Karbid (SiC) erlauben zwar maximale Temperaturen von 200-300°C bei gleichzeitig etwa 3-facher Wärmeleitfähigkeit. Jedoch sind diese Elemente teurer als Silizium-Halbleiter und erst eingeschränkt verfügbar.
- Die Isolation der Wicklungen (Isolierlack oder Bandage) in Motoren darf – je nach Isolationsklasse (s. Anhang 11.5) nicht heißer als 100-180°C werden. Die Isolation wird durch Übertemperatur ggf. nicht sofort zerstört, aber geschädigt, so dass sich die Lebensdauer verkürzt.
- Permanentmagnete werden abhängig vom Material und der aktuellen magnetischen Beanspruchung oberhalb von 120-180°C entmagnetisiert.

Ein hoher Wirkungsgrad ist demnach nicht nur wegen der Energiekosten, sondern auch bezüglich des nötigen Kühlaufwands wünschenswert.

### 10.1 Grundlagen der Wärmeleitung

#### Energiebilanz

Als fundamentales physikalisches Prinzip gilt die Erhaltung der Gesamtenergie in einem abgeschlossenen System (1. Hauptsatz der Thermodynamik). In offenen Systemen wird die gesamte innere Energie  $W$  über Zu- und Abfuhrterme bilanziert:

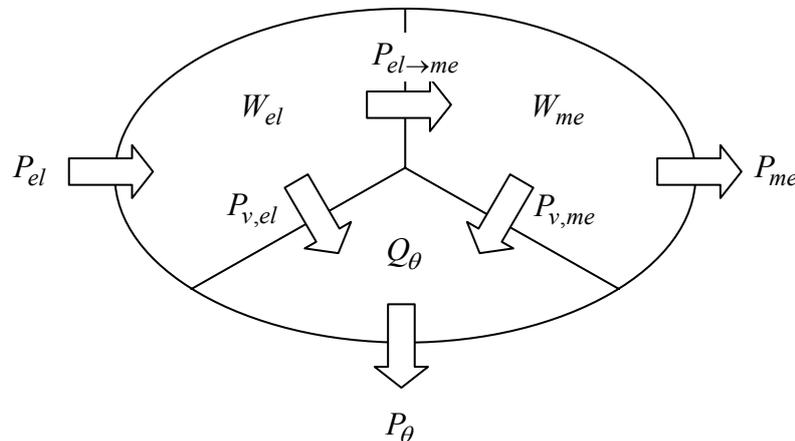
$$\dot{W} = P_{el} - P_{me} - P_{\theta}$$

Die Größen  $P_{el}$ ,  $P_{me}$  und  $P_{\theta}$  sind die elektrische, mechanische und thermische Leistungen, die dem System zugeführt bzw. aus dem System abgeführt werden. Die Wahl der Zählrichtungen in der Bilanzgleichung und unten stehenden Bild ist willkürlich. Die thermische Leistung  $P_{\theta}$  wird auch als *Wärmestrom* bezeichnet.

Wir nehmen, dass sich die gesamte innere Energie  $W$  in einzelne Anteile separieren lasse, also z. B. in einen elektromagnetischen Anteil  $W_{el}$ , in einen mechanischen Teil  $W_{me}$  sowie in eine Wärmemenge  $Q_{\theta}$ :

$$W = W_{el} + W_{me} + Q_{\theta}$$

Die Separation der Gesamtenergie in verschiedene Energieanteile ist keinesfalls ein allgemeines physikalisches Prinzip; bei vielen technischen Fragestellungen kann dennoch in guter Näherung so vorgegangen werden. Die Gastheorie ist allerdings ein Gegenbeispiel: Dort ist eine solche Aufspaltung der inneren Energie in einen thermischen und einen mechanischen Anteil prinzipbedingt nicht möglich.



Energien und Leistungsflüsse in einem elektromechanischen System

Unter der Annahme einer solchen Separation lassen sich die einzelnen Energieanteile getrennt bilanzieren. Zwischen den Energiearten gibt es innerhalb des Systems Leistungsflüsse, insbesondere tragen die elektrischen und mechanischen Verluste,  $P_{v,el}$  und  $P_{v,me}$ , zur Erhöhung der Wärmemenge bei:

$$\dot{Q}_\theta = P_{v,el} + P_{v,me} - P_\theta = P_v - P_\theta.$$

Im stationären Zustand müssen demnach die im Innern anfallenden Verluste als Wärmestrom über die Oberfläche abgeführt werden:

$$P_\theta = P_v.$$

Tauschen mehrere Körper über ihre Oberflächen Wärmeströme aus, so müssen diese aufgrund der Energieerhaltung von gleicher Größe und gegensinniger Orientierung sein.

### Wärmekapazität

Steigt die Wärmemenge  $Q_\theta$  eines Körpers, erhöht sich in der Regel seine Temperatur  $\theta$ . Die Änderung der Wärmemenge nach der Temperatur heißt Wärmekapazität:

$$C_\theta = \frac{dQ_\theta}{d\theta}$$

Die Wärmekapazität  $C_\theta$  ist zwar allgemein von der Temperatur und anderen Variablen wie z. B. dem Druck abhängig, kann aber für viele technische Probleme als Konstante angesehen werden. Das Verhältnis von Wärmekapazität und Masse  $m$  heißt *spezifische Wärmekapazität*

$$c = \frac{C_\theta}{m}$$

### Wärmewiderstand

Wird ein Körper an zwei Stellen seiner Oberfläche unterschiedlichen Temperaturen  $\theta_1, \theta_2$  ausgesetzt, so wird sich ein Wärmestrom  $P_\theta$  von der höheren zur niedrigeren Temperatur einstellen, der in vielen Fällen durch das lineare Gesetz

$$P_\theta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{R_\theta}$$

beschrieben werden kann. Die Konstante

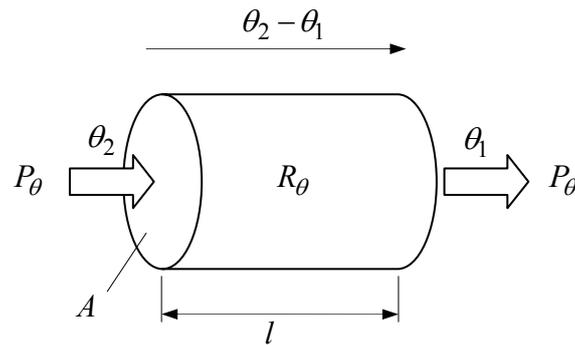
$$R_\theta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{P_\theta}$$

heißt *Wärmewiderstand*. Für homogene prismatische Körper, die nur über ihre Stirnflächen im Wärmeaustausch mit der Umgebung stehen, lässt sich aus dem Wärmewiderstand der spezifische Wärmewiderstand bestimmen, wobei  $A$  die Größe der Stirnfläche und  $l$  die Länge des Körpers ist.

$$\rho_\theta = \frac{R_\theta A}{l} \quad \text{bzw.} \quad R_\theta = \frac{\rho_\theta l}{A}$$

Die Kehrwerte dieser Größen heißen *Wärmeleitwert*  $G_\theta = 1/R_\theta$  und *spezifischer Wärmeleitwert* oder *Wärmeleitzahl*  $\lambda_\theta = 1/\rho_\theta$ :

$$G_\theta = \frac{P_\theta}{\theta_2 - \theta_1} = \frac{A \lambda_\theta}{l}$$



Wärmeleitung durch einen homogenen prismatischen Körper

Tabelle einiger spezifischer Wärmekapazitäten und Leitwerte

	$c$ in $\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$	$\lambda_\theta$ in $\frac{\text{W}}{\text{mK}}$
Wasser	4,183	0,58
trockene Luft	1,005	
Kupfer	0,385	401
Eisen	0,444	80,2
Silizium	0,700	148

Obwohl bei Wärmeleitungsproblemen im Allgemeinen das räumliche Kontinuum betrachtet werden muss, welches durch partielle Differentialgleichungen beschrieben wird, lassen sich viele technische Probleme durch Modelle mit *konzentrierten Parametern* (*lumped parameters*) hinlänglich gut beschreiben. Die Elemente eines solchen konzentrierten thermischen Modells können analog zu Elementen elektrischer Kreise betrachtet werden, da die zugrunde liegenden physikalischen Gesetze zueinander homomorph sind.

Neben den Analogien der Gesetzmäßigkeiten der einzelnen Elemente (der konstitutiven Gleichungen) ist noch festzustellen, dass das 1. Kirchhoffsche Gesetz, die Knotenregel, beim thermischen Netzwerk aufgrund der Energieerhaltung bzw. der Energiebilanz als Analogon zur Erhaltung bzw. Bilanz der elektrischen Ladung folgt. Das 2. Kirchhoffsche Gesetz leitet sich im elektrischen Fall aus der Existenz eines elektrostatischen Potentials ab; im thermischen Fall entspricht diesem Potential die Temperatur.

Die Zuordnung ist also wie folgt:

elektr. Größe	Symbol	Maßeinheit	thermische Größe	Symbol	Maßeinheit
elektrischer Strom	$I$	1 A	Wärmestrom	$P_\theta$	1 W
elektrische Ladung	$Q$	1 As	Wärmemenge	$Q_\theta$	1 J
elektrische Spannung	$U$	1 V	Temperaturdifferenz	$\Delta\theta$	1 K
elektrostatisches Potenzial	$V$	1 V	Temperatur	$\theta$	1 K, 1°C
Ohmscher Widerstand	$R$	1 $\Omega$	Wärmewiderstand	$R_\theta$	1 $\frac{\text{K}}{\text{W}}$
Kondensator	$C$	1 $\frac{\text{As}}{\text{V}}$	Wärmekapazität	$C_\theta$	1 $\frac{\text{J}}{\text{K}}$

Die thermische Modellierung und Berechnung kann der Elektrotechniker dann mit den ihm gewohnten Elementen durchführen.

Als Beispiel werde ein thermisches Modell mit einer einzigen Wärmequelle, welche durch ohmsche Verluste gespeist wird, einer Wärmekapazität und einem Wärmewiderstand betrachtet (s. Bild unten). Genauere thermische Modelle z.B. von Motoren sind deutlich aufwändiger. Für eine erste überschlägige Betrachtung ist dennoch ein solch einfaches Modell hilfreich:

Wärmequelle:

$$P_v = Ri^2$$

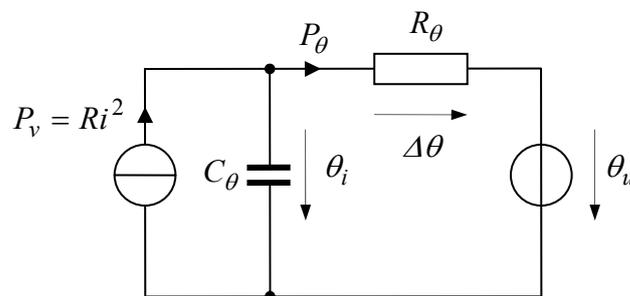
Dynamisches Verhalten der Wärmekapazität,  $\theta_i$  ist die innere Temperatur des Widerstands:

$$C_\theta \dot{\theta}_i = P_v - P_\theta$$

Wärmeleitung zur Umgebung, die Umgebungstemperatur ist  $\theta_u$  :

$$P_\theta = \frac{\Delta\theta}{R_\theta} = \frac{\theta_i - \theta_u}{R_\theta}$$

Die Zusammenhänge lassen sich übersichtlich in einem Ersatzschaltbild darstellen:



Einfaches thermisches Ersatzschaltbild

An diesem einfachen Modell, welches exemplarisch nicht nur für einen ohmschen Widerstand sondern ganz allgemein für viele andere einfache thermische Vorgänge stehen soll, seien die grundsätzlichen Punkte erläutert:

### Bemessung nach Dauerleistung (S1)

Der ohne wesentliche Unterbrechung andauernde Betrieb mit konstanter Verlustleistung wird als S1 bezeichnet (vgl. Anhang 11.4). In diesem Fall kann man von einem stationären Zustand ausgehen; die Temperaturen sind nach einiger Zeit eingeschwungen und ändern sich nicht mehr. Die Größe der Wärmekapazität ist für den stationären Zustand ohne Belang. Der Zusammenhang zwischen den Temperaturen und der Verlustleistung ergibt sich nach

$$P_v = P_\theta = \frac{\Delta\theta}{R_\theta} = \frac{\theta_i - \theta_u}{R_\theta}$$

Je nach Sichtweise kann man unterschiedliche thermische Bemessungsaufgaben formulieren:

1. Bei vorgegebener maximaler Betriebstemperatur  $\theta_{i\max}$  und maximaler Umgebungstemperatur  $\theta_{u\max}$  bestimmt sich die zulässige Verlustleistung zu

$$P_{v\max} = \frac{\theta_{i\max} - \theta_{u\max}}{R_\theta} = \frac{\Delta\theta_{\max}}{R_\theta}$$

Der Betrieb muss so geführt werden, dass dieser Wert nicht überschritten wird

2. Bei vorgegebener maximaler Betriebstemperatur  $\theta_{i\max}$  und maximaler Verlustleistung  $P_{v\max}$  ist die maximal zulässige Umgebungstemperatur bzw. Kühlmitteltemperatur zu bestimmen:

$$\theta_{u\max} = \theta_{i\max} - P_{v\max} R_\theta$$

3. Bei vorgegebener maximaler Betriebstemperatur  $\theta_{i\max}$ , maximaler Umgebungstemperatur  $\theta_{u\max}$  und abzuführender maximaler Verlustleistung  $P_{v\max}$  ist der notwendige Wärmewiderstand zu bestimmen, welcher sich durch Veränderung des Kühlkörpers oder Erhöhung der Konvektion (Gebläse) verändern lässt:

$$R_\theta = \frac{\theta_i - \theta_u}{P_{v\max}} = \frac{\Delta\theta}{P_{v\max}}$$

### Bemessung nach Kurzzeitbetrieb (S2)

Die thermische Zeitkonstante des Systems ist

$$\tau_\theta = R_\theta C_\theta.$$

Sind die Verlustleistung  $P_v$  und die Umgebungstemperatur  $\theta_u$  zeitlich konstant, entwickelt sich die Temperatur wie bei einem elektrischen  $RC$ -Glied nach einer Exponentialfunktion, die man in der Anfangs-Endwert-Darstellung folgendermaßen ansetzen kann. Vorteilhafterweise stellt man die Temperatur als Differenz zur Umgebungstemperatur dar:

$$\Delta\theta(t) = \theta_i(t) - \theta_u = \Delta\theta_0 e^{-\frac{t}{\tau_\theta}} + \Delta\theta_\infty \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_\theta}} \right)$$

Hierbei sind

$$\Delta\theta_0 = \Delta\theta(0)$$

der Anfangswert und

$$\Delta\theta_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta\theta(t) = \frac{P_v}{R_\theta}$$

der stationäre Endwert der Temperaturdifferenz.

Beim Kurzzeitbetrieb S2 wird angenommen, dass die Anfangstemperatur gleich der Umgebungstemperatur ist, also

$$\Delta\theta_0 = 0.$$

Wird nun das Gerät nur für eine Betriebsdauer  $t_b$  eingeschaltet, wird die stationäre Endtemperaturdifferenz  $\Delta\theta_\infty$  nicht erreicht, sondern nur

$$\Delta\theta_{\max} = \Delta\theta(t_b) = \Delta\theta_\infty \left( 1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_\theta}} \right)$$

$$\frac{\Delta\theta_{\max}}{\Delta\theta_\infty} = 1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_\theta}}$$

Löst man nach der Leistung auf, erhält man als maximal mögliche Leistung

$$P_{v\max,S2} = \frac{R_\theta \Delta\theta_{\max}}{1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_\theta}}} = \frac{P_{v\max,S1}}{1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_\theta}}}$$

Man erkennt, dass die maximal mögliche Verlustleistung größer ist als bei Dauerbetrieb. Der mögliche Überlastfaktor

$$\frac{P_{v\max,S2}}{P_{v\max,S1}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_\theta}}}$$

hängt von der thermischen Zeitkonstante und der Betriebsdauer ab. Als Faustregel kann man sich merken, dass dies nur einen nennenswerten Unterschied ausmacht, wenn die Betriebsdauer deutlich kleiner als die dreifache Zeitkonstante ist:

$$t_b < 3\tau_\theta$$

Ist diese Abschätzung nicht erfüllt, handelt es sich quasi um Dauerbetrieb S1 ( $e^{-3} = 5\%$ ).

Beim S2-Betrieb geht man davon aus, dass nach dem Ausschalten bis zum nächsten Einschalten genügend Zeit vergeht, so dass sich das Gerät wieder bis auf die Umgebungstemperatur abkühlen kann. Als Faustregel für die notwendige Betriebspause  $t_p$  kann gelten:

$$t_p > 3\tau_\theta$$

### Bemessung nach Aussetzbetrieb (S3)

Beim Aussetzbetrieb wird angenommen, dass sich Betriebsphasen der Dauer  $t_b$  und Pausen der Dauer  $t_p$  periodisch wiederholen. Die Dauer der gesamten Periode sei

$$t_s = t_b + t_p .$$

Nach dem erstmaligen Einschalten wird die Temperatur ansteigen, sich aber in einer kurzen Pause nicht wieder auf den Anfangswert abkühlen. Auf diese Weise steigt die mittlere Temperatur über einige Ein- und Ausschaltphasen hinweg an, bis sich ein Gleichgewicht einstellt und sich der Vorgang periodisch wiederholt. Die Temperatur entwickelt sich abschnittsweise nach Exponentialfunktionen. Denkbar ist, dass während des Betriebs und in der Pause unterschiedliche thermische Zeitkonstanten  $\tau_b$  und  $\tau_p$  maßgeblich sind, z.B. wenn es sich um einen Motor mit Selbstbelüftung handelt, so dass während des Stillstands auch keine Kühlluft zugeführt wird. Die Bestimmungsgleichungen für die minimale und die maximale Temperatur im periodischen Zustand lauten dann folgendermaßen:

$$\Delta\theta_{\max} = \Delta\theta_{\min} e^{\frac{t_b}{\tau_b}} + \left(1 - e^{\frac{t_b}{\tau_b}}\right) \Delta\theta_\infty$$

$$\Delta\theta_{\min} = \Delta\theta_{\max} e^{-\frac{t_p}{\tau_p}}$$

Die Elimination von  $\Delta\theta_{\min}$  führt zu

$$\Delta\theta_{\max} = \Delta\theta_{\max} e^{-\frac{t_p}{\tau_p}} e^{\frac{t_b}{\tau_b}} + \left(1 - e^{\frac{t_b}{\tau_b}}\right) \Delta\theta_\infty$$

$$\Delta\theta_{\max} \left(1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_b} - \frac{t_p}{\tau_p}}\right) = \left(1 - e^{\frac{t_b}{\tau_b}}\right) \Delta\theta_\infty$$

$$\frac{\Delta\theta_{\max}}{\Delta\theta_{\infty}} = \frac{1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_b}}}{1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_b} - \frac{t_p}{\tau_p}}}$$

Daraus ergibt sich der zulässige Leistungs-Überlastfaktor für den S3-Betrieb:

$$\frac{P_{v\max,S3}}{P_{v\max,S1}} = \frac{1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_b} - \frac{t_p}{\tau_p}}}{1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_b}}}$$

Über

$$\Delta\theta_{\min} = e^{-\frac{t_p}{\tau_p}} \frac{1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_b}}}{1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_b} - \frac{t_p}{\tau_p}}} \Delta\theta_{\infty}$$

gewinnt man außerdem die Temperaturschwankung während einer Arbeitsperiode:

$$\theta_{\max} - \theta_{\min} = \Delta\theta_{\max} - \Delta\theta_{\min} = \frac{\left(1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_b}}\right) \left(1 - e^{-\frac{t_p}{\tau_p}}\right)}{1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_b} - \frac{t_p}{\tau_p}}} \Delta\theta_{\infty}$$

Selbst wenn die maximal zulässige Temperatur eingehalten wird, altern viele elektrotechnische Komponenten bereits aufgrund der thermischen Wechselbelastung. Eine hohe, aber gleichbleibende Temperatur kann bezüglich der Lebensdauer günstiger sein als zahlreiche thermische Wechselbeanspruchungen.

## 11 Anhang: Begriffe und Tabellen für elektrische Betriebsmittel

### 11.1 Spannungsklassen

Spannungsklassen in der *Elektroinstallation*:

Schutzkleinspannung	< 50V AC oder < 120 V DC
Hochspannung	> 1 kV

In der *elektrischen Energietechnik* werden die Spannungsbegriffe folgendermaßen definiert:

Niederspannung	< 1 kV
Mittelspannung	1-50 kV
Hochspannung	50-150 kV
Höchstspannung	> 150 kV

### 11.2 Schutzklassen

Schutzklassen elektrischer Betriebsmittel zur Verhinderung der Berührung elektrischer Spannungen nach DIN 40100:

Schutzklasse	Bedeutung
0	kein Schutz
I	mit Schutzleiter (PE-Leiter)
II	doppelte oder verstärkte Isolierung, kein PE-Leiter
III	Gerät mit Schutzkleinspannung, benötigt keinen weiteren Schutz

### 11.3 Schutzarten

Schutzarten nach DIN EN 60529: IPxy (IP: internal protection)

Ziffer x	Schutz gegen Berühren	Schutz gegen Fremdkörper
0	kein Schutz	kein Schutz
1	Schutz gegen große Körperteile >50mm	gegen große Fremdkörper >50mm
2	>12mm	>12mm
3	>2,5mm	>2,5mm
4	>1mm	>1mm
5	vollständig	gegen Staubablagerung
6	vollständig	gegen Staubeintritt
Ziffer y	Schutz gegen Wasser	
0	kein Schutz	
1	gegen senkrecht fallendes Tropfwasser	
2	gegen schräg fallendes Tropfwasser (15°)	
3	gegen Sprühwasser (60° seitlich)	
4	gegen allseitiges Spritzwasser	
4k*	gegen allseitiges Spritzwasser unter Druck	
5	gegen Strahlwasser	
6	Schutz gegen starkes Strahlwasser	
6k*	starkes Strahlwasser unter erhöhtem Druck	
7	gegen zeitweiliges Untertauchen	
8	gegen dauerndes Untertauchen	
9k*	gegen Hochdruck	

\* für Straßenfahrzeuge

### 11.4 Betriebsarten

Betriebsarten nach IEC 34 Teil 1

S1	Dauerbetrieb
S2	Kurzzeitbetrieb
S3	Aussetzbetrieb ohne Einfluss des Anlaufvorganges
S4	Aussetzbetrieb mit Einfluss des Anlaufvorganges
S5	Aussetzbetrieb mit Einfluss des Anlaufvorganges und der elektrischen Bremsung
S6	Durchlaufbetrieb mit Aussetzbelastung
S7	Ununterbrochener Betrieb mit Anlauf und elektrischer Bremsung
S8	Ununterbrochener Betrieb mit periodischer Drehzahländerung
S9	Ununterbrochener Betrieb mit nichtperiodischer Drehzahl- und Momentenänderung

## 11.5 Isolationsklassen für Motoren

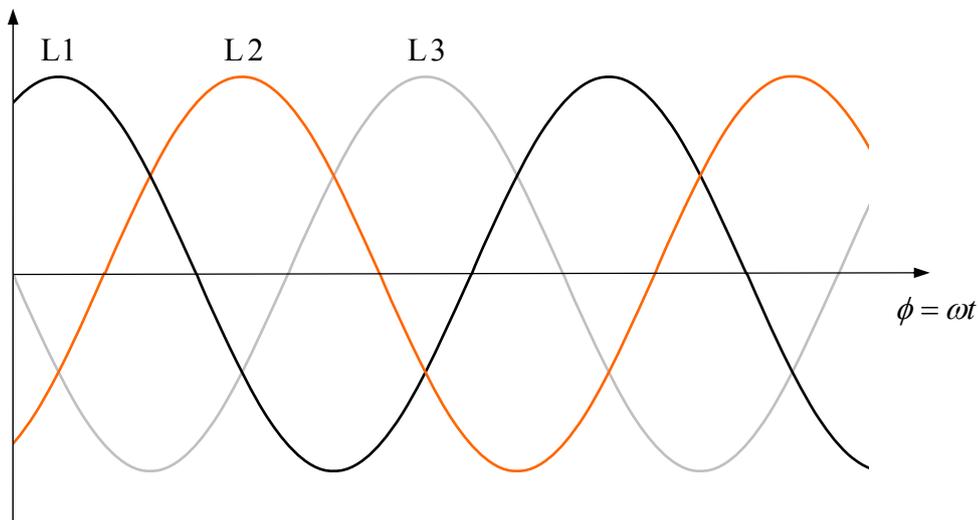
Isolationsklasse	max. Motortemperatur	max. Umgebungstemperatur
Y	90°C	40°C
A	105°C	40°C
E	120°C	40°C
B	130°C	40°C
F	155°C	40°C
H	180°C	60°C
C	>180°C	60°C

## 11.6 Phasenfolge, Rechts- und Linkslauf

Normgerechte Bezeichnung der Leiter eines Drehstromnetzes: L1, L2, L3. Der Phasenwinkel von L2 gegenüber L1 ist um  $120^\circ$  nacheilend, ebenso L3 gegenüber L2. Nach der neuen Norm DIN VDE 0293-308 werden (seit 2003) die Leiter durch folgende Farben kenntlich gemacht:

L1	schwarz
L2	braun
L3	grau
N	blau
PE	gelb-grün

Bei der älteren Farbkodierung (schwarz/schwarz/braun) für die Leiter L1, L2, L3 ist die Phasenfolge nicht eindeutig erkennbar.

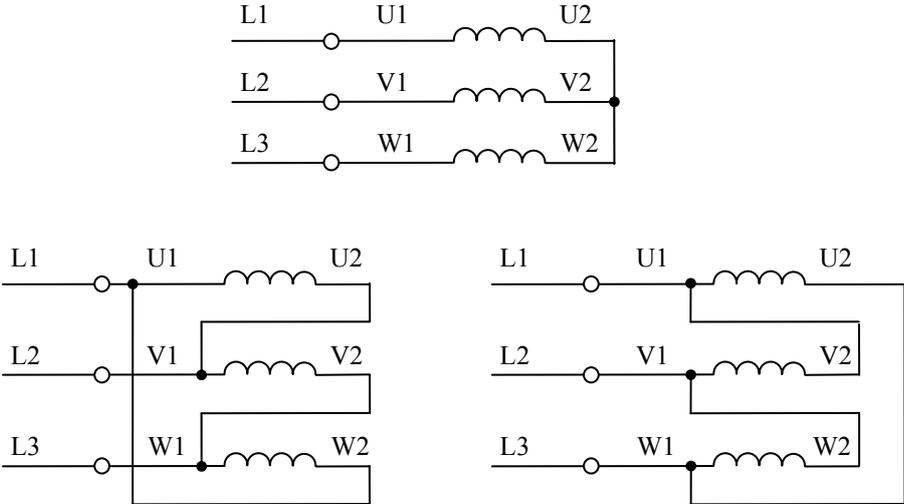


Zur Phasenfolge eines Drehstromsystems

Normgerechte Bezeichnung der Wicklungen von Drehstrommotoren: U, V, W. Die Anschlüsse der Wicklungen heißen U1, U2, V1, V2, W1, W2. Häufig wird der Motor bereits intern im Stern geschaltet, so dass nur die Anschlüsse U1, V1, W1 herausgeführt werden.

Definition des *Rechtslaufs*: Beim Anschluss von U1, V1, W1 an L1, L2, L3 (oder einer zyklischer Vertauschung) wird beim Blick *von außen* auf das antriebsseitige Wellenende sich dieses *rechtsherum* drehen, sofern der Motor normgerecht gefertigt wurde. Um Linkslauf zu erreichen, sind zwei der drei Klemmen zu vertauschen.

In Darstellungen mit komplexen Zeigern bevorzugt man dagegen den mathematisch positiven Drehsinn; also linksdrehende Zeiger für den mechanisch rechtsdrehenden Motor. Perspektivisch kann man dies derart interpretieren, dass man hierbei vom *Inneren* des Motors oder vom hinteren Lagerschild in Richtung des antriebsseitigen Wellenendes schaut.



Schaltungsarten für rechtsdrehende Drehstrommotoren

## 12 Größengleichungen vs. Zahlenwertgleichungen

In allen modernen naturwissenschaftlichen und technischen Disziplinen ist mittlerweile die *Größengleichung* Standard. Die darin auftretenden physikalischen oder technischen *Größen* werden durch den *Größenwert* quantisiert. Der Größenwert besteht immer aus einem Produkt einer *Maßzahl* und einer *Maßeinheit*. Durch die Verwendung verschiedener Maßeinheiten für die Messung einer Strecke wie beispielsweise m, mm, km, nautische Meilen oder Zoll<sup>5</sup> verändert sich der Größenwert nicht, da die Umrechnung der Maßeinheit stets mit einer entsprechenden Umrechnung der Maßzahl einhergeht. Größengleichungen sind daher völlig unabhängig von den konkreten Maßeinheiten, in denen die auftretenden Größen vermessen werden sollen.

Im Gegensatz dazu verknüpft die *Zahlenwertgleichung* nur die Maßzahlen, nicht aber die Maßeinheiten. Es muss stets gesondert spezifiziert werden, welche Größen in welchen Maßeinheiten zu messen sind.

Beispiel für eine Größengleichung:

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2\pi n}$$

In dieser Gleichung lässt sich beispielsweise die Drehzahl  $n$  je nach Geschmack oder Zweckmäßigkeit in 1/s oder 1/min<sup>6</sup> ausdrücken, das Drehmoment in Nm, kNm oder mNm. Die Gleichung selbst bedarf *in keinem der Fälle* einer Veränderung.

Im Gegensatz dazu findet man beispielsweise die Zahlenwertgleichung

$$T = \frac{P \cdot 9549}{n}$$

mit der Angabe, dass das Drehmoment  $T$  in Nm, die Leistung  $P$  in kW und die Drehzahl  $n$  in 1/min einzusetzen ist. Die Nachteile sind offensichtlich:

- Die notwendige zusätzliche Angabe der Maßeinheiten ist schwerfällig, darf aber keinesfalls entfallen, da sonst schwere Missverständnisse und falsche Ergebnisse resultieren.
- Die in Zahlenwertgleichungen immer auftretenden Konstanten verschleiern die physikalische Struktur: Es ist der Gleichung nicht mehr ohne weiteres anzusehen, ob diese einen exakten physikalisch-technischen Zusammenhang oder lediglich eine empirische Näherung beschreibt.

Zahlenwertgleichungen sollen daher nicht mehr verwendet werden.

<sup>5</sup> Größengleichungen bleiben selbst dann unverändert, wenn andere als die im internationalen Maßsystem vorgeschlagenen Maßeinheiten (SI-Einheiten) verwendet werden.

<sup>6</sup> Auch wenn die Zahl der Umdrehungen *pro Minute* gemessen wird, hat die Zahl 60 in dieser Größengleichung nichts verloren, wie man es leider fälschlicherweise immer wieder antrifft.

---

## 13 Literatur

Dierk Schröder

Elektrische Antriebe – Grundlagen

Springer Verlag, 3. Aufl., 2007

Klaus Fuest, Peter Döring

Elektrische Maschinen und Antriebe

Vieweg Verlag, 6. Auflage, 2004

Hans-Dieter Stölting, Eberhard Kallenbach

Handbuch Elektrische Kleinantriebe

Hanser Verlag, 3. Auflage, 2006

Rolf Fischer

Elektrische Maschinen

Hanser Verlag, 7. Auflage, 1989

Germar Müller

Elektrische Maschinen – Betriebsverhalten rotierender elektrischer Maschinen

VDE-Verlag, 1990

Hans-Ulrich Giersch, Hans Harhus, Norbert Vogelsang

Elektrische Maschinen – Prüfung, Normung, Leistungselektronik

Teubner, 5. Auflage, 2003